matemáticas

sexto grado.

Coordinador: **Carlos Imaz.**

Colaboradores: Ma. de la Paz Alvarez, Carlos Imaz, Alberto Molina, Javier Ramos, *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.*

Autores: Carlos César Constantino Dominguez, Francisco Madrigal Vega, *Subdirección General de Coordinación Educativa, Secretaría de Educación Pública.*

Versión Preliminar: Enrique Oaxaca Muñiz, María Rebolledo de Tamayo.

Diseño e Ilustración: *Dirección Artística:* Adolfo Falcón G.
Subdirección: Luis Carlos Emerich Z.
Coordinación: Martha Velasco, Alicia Albo, Herlinda Sánchez Laurel, Víctor Ortiz.

Ilustradores: Federico Calderón, Francisco Castro, José Castro, José Duarte, Bruno González, Carlos Lupercio, Rafael de León, Luis R. Miranda, Kiyoto Oota, Arturo Ramírez, Herlinda Sánchez Laurel, Marcia Salcedo, Susana Trejo, Javier Talavera.

Montaje: Carlos Contreras, José Luis Villanueva, Felicitas Gaspar, Jaime Becerra, Roberto Contreras, Alfonso Martínez, Eduardo Contreras, Arturo Ruiz, Fabiel Gómez, Alejandro Arellano, Alejandro Contreras, Olivia Bocanegra.
canegra

Corrección: Aída Lerma, Carlos E. Forno.

Cubierta: diseño, Juan Ramón Arana; fotografía, Aníbal Angulo.

© Derechos Reservados SEP. 1974.
Todo modificación, edición o reforma de esta obra deberá llevarse a cabo con el permiso previo y expreso de la Secretaría de Educación Pública

Índice

Parte I: Libro de Trabajo

Introducción 6
Los números 8
Los números en la recta 10
Comparación entre números 12
Las operaciones 13
Un crucigrama de números 14
Figuras planas y su área 16
¿Qué es el azar? 18
Fracciones equivalentes 20
Escalas 23
Usos de la simetría 25
Volúmenes 28
Problema de distancias 31
Lógica 32
Azar y probabilidad 33
Monedas extranjeras y tipo de cambio 37
Angulos y polígonos 40
Porcentaje 46
Fracciones equivalentes 50
Un problema de albañilería 53
Uso del porcentaje 54
Circunferencia 55
¿Qué es el precio de una cosa? 58
Estadística y Probabilidad 60
Fracciones y Decimales 62
Exponentes 63
Area del polígono y área del círculo 64
Unas cosas dependen de otras 68
Reparto proporcional 70
Prisma y cilindro 71
Los números no siempre son exactos 72

Engranes 74
Lógica 77
Modelos 79
El costo de la vida 83
Areas 84
Implicación 87
Un problema de construcción 88
Unidades de tiempo 90
Volúmenes 92
Suma y resta de enteros 98
Estadística, probabilidad y zapatos tenis 102
El Seguro Social 104
Unas cantidades están en función de otras 105
Implicaciones falsas o verdaderas 107
Experimento 108
Poleas y bandas 111
Un corral para los borregos 114
Trapecios, prismas y cimientos 118
Silos: cilindros y conos 122
El club escolar y comunitario 126
La cooperativa empacadora de jitomate 130
Las matemáticas y las noticias 133

Parte II: Compendios

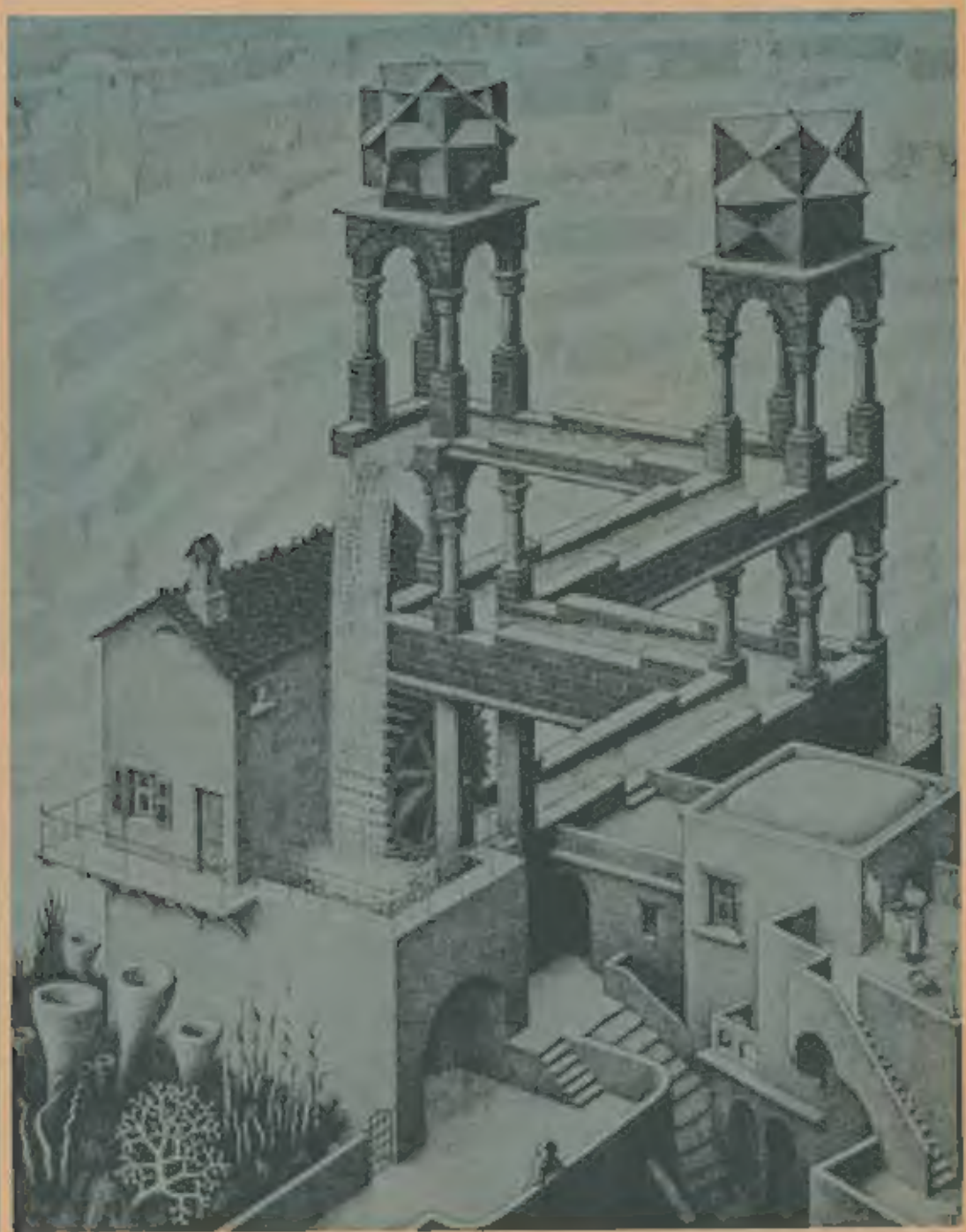
Aritmética 138
Geometría 153
Probabilidad y Estadística 177

Introducción

Quienes hicieron este libro creen que las Matemáticas son algo agradable. Por ello encontrarás problemas muy diversos de entre los cuales, seguramente, habrá muchos que te plantean situaciones interesantes y estimulantes. Quienes hicieron el libro también creen que las Matemáticas son algo útil, algo que podrá ayudarte en el futuro a tratar de resolver muchas situaciones que se presenten en tu medio. Por ello, se trata no sólo de darte información aislada, sino de darte un método para enfrentarte a problemas.

Algunas recomendaciones generales son:

1. Trata de leer con atención y no te conformes hasta haber entendido bien.
2. Procura trabajar en equipo con compañeros de tu clase. Al trabajar en equipo **todos** deben colaborar.
3. No te detengas cuando te falte información. Como material de consulta puedes usar el compendio que viene con este libro. Si te es posible usa otros libros. Consulta con tus compañeros, con tus maestros, con tus conocidos, con quien creas conveniente. Recuerda que **nadie** lo sabe todo. Recuerda que consultar **no** quiere decir que ellos te resuelvan el problema, eso debes hacerlo tú, de otra manera habrás perdido el tiempo.
4. Si un problema parece difícil, a veces conviene olvidarse un poco de él, e intentar su resolución en otro momento.
5. No caigas en simple memorización de las cosas.
6. Procura llevar a cabo las actividades que se sugieren en el libro, ellas enriquecerán tu experiencia y, por lo tanto, tu conocimiento.



Los números

Esperamos que no te hayas olvidado de los números. A continuación tienes una lista de algunos de ellos y de algunos nombres. Por medio de las letras asocia cada número con su nombre.

( )	4,208	A)	Cuarenta enteros y doscientos ocho milésimas
( )	42,008	B)	Cuarenta y dos enteros ocho centésimos
( )	40.208	C)	Cuatrocientos dos mil ochenta unidades
( )	40,028	D)	Cuatro mil doscientos ocho unidades
( )	42.08	E)	Cuarenta y dos mil ochenta unidades
( )	42,080	F)	Cuarenta y dos mil ocho unidades
( )	402,080	G)	Cuarenta mil veintiocho unidades

Es importante que recuerdes lo que significa esta manera de escribir los números, que usualmente se llama forma decimal.

Por ejemplo, algo como 3,974 es una forma abreviada de escribir 3,000 + 900 + 70 + 4, es decir 3 unidades de millar, 9 centenas, 7 decenas y 4 unidades.

Escribe en forma desarrollada los números siguientes:

875 = 800 + 70 + 5 = 8 centenas + 7 decenas + 5 unidades

6,217 =

20,936 =

4,003 =

501 =

126,375 =

Por otro lado, hemos convenido en que las cifras que aparecen a la derecha de un punto (punto decimal) representan fracciones decimales de la unidad. Algo como 1.74 es una expresión abreviada de $1 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100}$, es decir 1 unidad, más 7 décimos de la unidad y 4 centésimos de la unidad.

Escribe en forma desarrollada los números siguientes:

$0.275 = \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$ = 2 décimos + 7 centésimos + 5 milésimos

13.35 =

27.45 =

0.936 =

0.129 =

2.803 =

3.04 =

A continuación te damos algunos números escritos en forma desarrollada: escribe al lado de cada uno de ellos su forma abreviada (decimal).

$300 + 80 + 5 =$

$700 + 9 + \frac{1}{10} =$

$6\,000 + 40 + 2 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} =$

$\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1\,000} =$

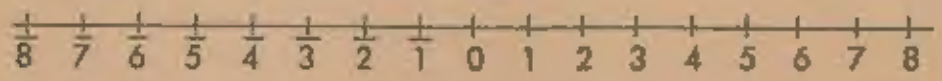
$200 + \frac{1}{10} + \frac{2}{1\,000} =$

$70\,000 + 6\,000 + 1 + \frac{1}{100} =$

$5\,000 + \frac{3}{1\,000} =$

Los números en la recta

Los números pueden representarse sobre una línea recta. Escogemos un punto que asociamos con el número cero. Escogemos una unidad de longitud que trasladamos a partir del cero hacia la derecha para representar los números enteros positivos, y hacia la izquierda los números enteros negativos, como se ve en la ilustración.



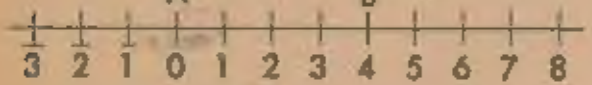
En esta representación los números quedan ordenados y ese orden corresponde al orden de magnitud de los números, un número que está a la derecha de otro es mayor que él. Por ejemplo, $7 > 3$, pues 7 está a la derecha del 3 en la recta numérica.

En la recta numérica podemos representar también otros números además de los enteros, por ejemplo, las fracciones. Señala en la recta de arriba los puntos donde colocarías las siguientes fracciones:

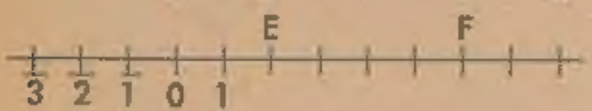
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{4}$, $5 + \frac{1}{3}$, $2 + \frac{1}{2}$,.

Seguramente que hay dos de las fracciones de arriba a las que asignaste un mismo punto en la recta. ¿Puedes explicar por qué?

Fíjate en las ilustraciones que vienen a continuación y en cada caso localiza dónde se encuentra el punto medio entre los dos puntos señalados con letras.



el punto medio está en ☐



el punto medio está en ☐

el punto medio está en ☐

el punto medio está en ☐

En la carretera que va de Mexico a Guadalajara, la ciudad de Morelia está en el kilometro 313 y la ciudad de Zamora en el kilometro 465 ¿En qué kilometro está el punto medio entre Morelia y Zamora?

Ya te habras dado cuenta del procedimiento que sigues para calcular el numero que está a la mitad entre otros dos números. Explica ese procedimiento. _____

_____

Resuelve estos problemas:

Una bolsa de azùcar pesa 300 g y otra 150 g, si paso azúcar de la primera bolsa a la segunda, hasta que pesen lo mismo, ¿cuanto pesará cada bolsa? _____

Adolfo tiene $ 34 00 y su hermano $ 12.00, si lo reúnen y se lo reparten en partes iguales, ¿cuanto le toca a cada uno? _____

Si tienes un litro de agua a una temperatura de 80 C y lo mezclas con un litro de agua que está a 50° C, ¿cuál será la temperatura de la mezcla? _____

Para que esta balanza quede equilibrada con todos estos paquetes, ¿cuántos debe haber en cada platillo? _____

Comparación entre números

Comparar numeros para saber cuál es más grande, resulta en muchos casos un problema sencillo. Por ejemplo, si están marcados en la recta numérica sabemos que el más grande es el que está más a la derecha.

Si los tenemos escritos en forma decimal también es fácil compararlos. En otras ocasiones puede no ser tan sencillo y tenemos que hacer algo de trabajo para poderlos comparar.

Compara los números que aparecen a continuacion y relaciónalos con el signo adecuado ($>$, $<$, $=$)

$7 \square 5$,

$\bar{1} \square 2$,

$1 \times 1 \square 1 \times 1 \times 1$

$\frac{3}{4} \square \frac{5}{8}$

$\frac{1}{4} \square .25$

$\frac{5}{9} \square \frac{5}{10}$

$2.36 \square 2\frac{1}{3}$

$24 \square 42$,

$\bar{1} \square \bar{5}$,

$\frac{2}{3} \square \frac{1}{5}$

$\frac{2}{15} \square \frac{3}{8}$

$\frac{7}{12} \square \frac{21}{36}$

$.07 \square .68$

$0 \square 3$

$2 = 2 \times 2 \times 2 \square 3 \times 3 = 3^2$

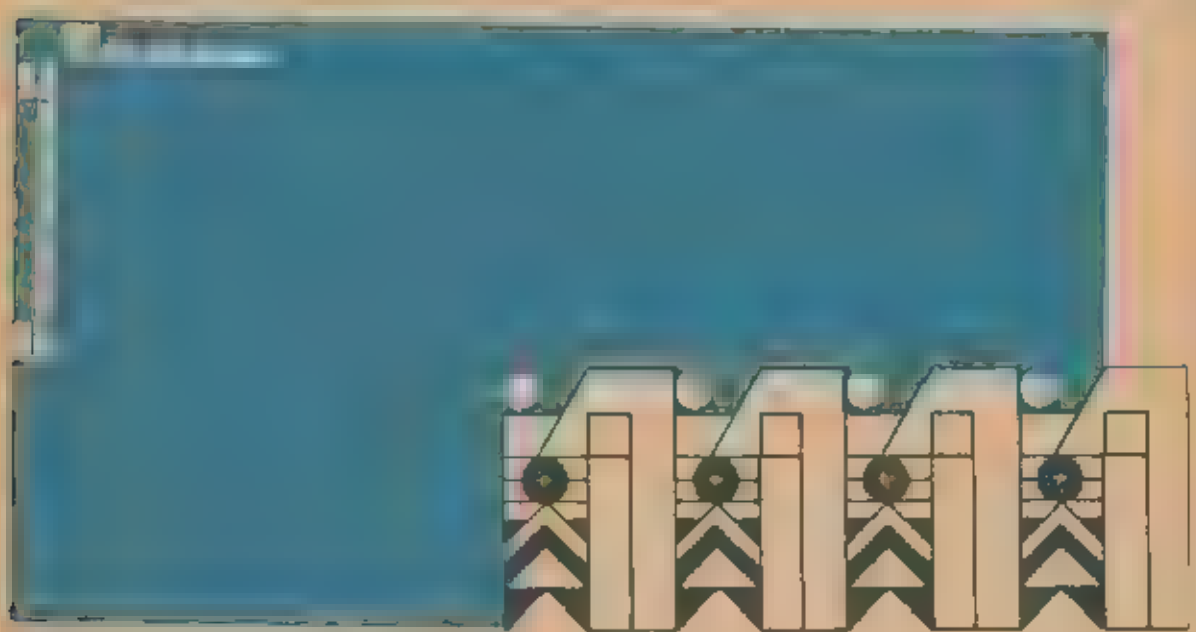
$3 + \bar{7} \square \bar{3} + \bar{1}$

$.8 \square .749$

$.125 \square \frac{1}{7}$

$1.5 \square \frac{3}{2}$

$\frac{9}{7} \square 1.3$



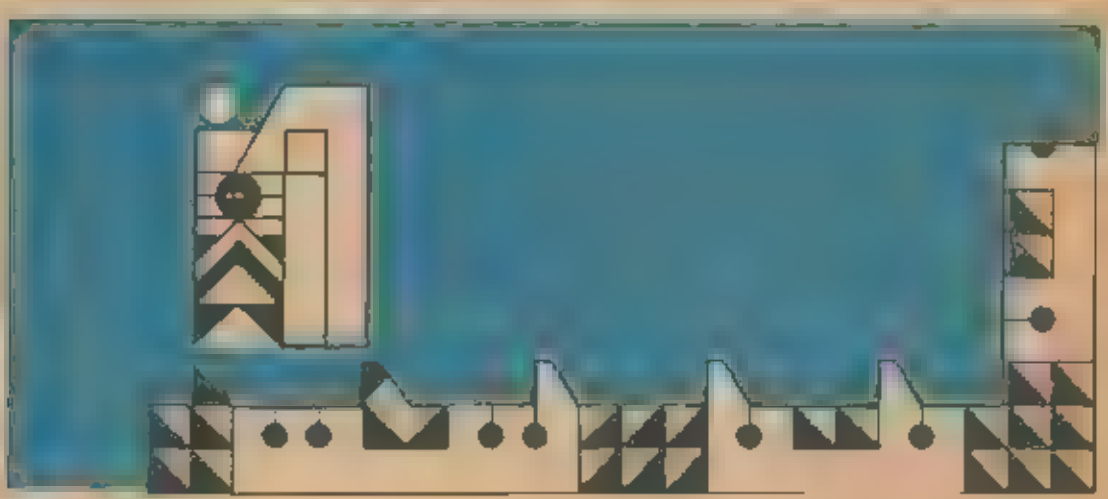
Las operaciones

Sin duda sabes hacer operaciones con números, sumarlos, multiplicarlos, etc. Pero es importante que recuerdes qué son estas operaciones. Si es así, no será difícil hacer el ejercicio que te proponemos a continuación:

Sin hacer las operaciones encierra en un círculo el número que creas que se aproxima más al resultado de cada operación, elije el número de entre los del mismo renglón en que esta la operación propuesta.

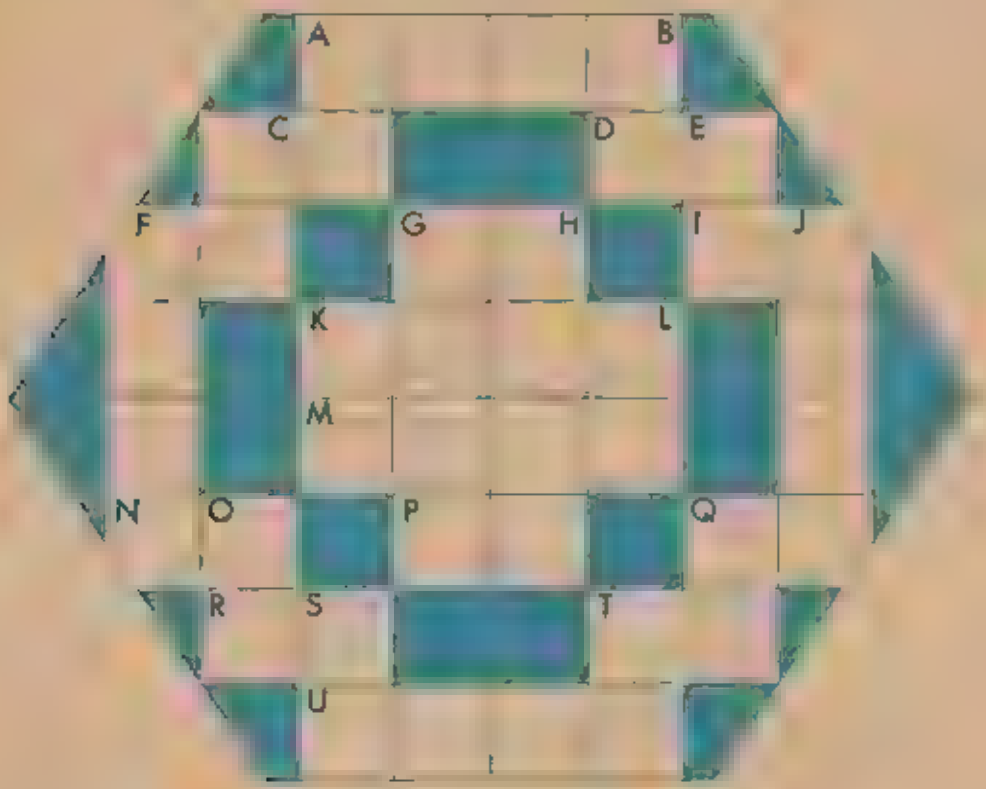
75 + 17	60	152	91	105
328 — 143	180	200	125	346
42.38 + 173.02	180	210	125	316
1 — .006	.4	5	.9	1.004
83 × 19	102	520	817	1600
15 × .2	3	30	1.6	20
459 : 9	80	50	72	102
35 : .2	17	7	170	135
15 × 15	230	30	150	75
.1 × .1	.1	.10	.01	10
45 × 10 + 30	720	500	85	1800
$\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{12}$

Ahora realiza cada operación, anota el resultado en la última columna y compáralo con tu aproximación.



Un crucigrama de números

Para practicar con números les sugerimos que resuelvan este crucigrama colectivamente en clase, pídanle al maestro que él dibuje el crucigrama en el pizarrón para hacer más fácil el ejercicio.



Horizontales

A) $726 + 847 =$ ___

C) Número que sirve de base al sistema de numeración maya.

D) Solución de $19 \times [\quad] = 1\,159$

F) LIX en indoarábigos.

G) $2^3 \times 3^2 =$ ___ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

I) $(8 \times 9) + 1 =$ ___

K) Primeras 4 cifras decimales del número $\pi = 3.1416$

M) $1\,297 \times 3$

N) Solución de $\dfrac{4 + 1\,220}{24} = \square$

P) Cociente de 1 876 y 28

Q) Valor relativo de la cifra 6 en el número 1 965

R) Meses del año.

T) Entero mayor que 25 y menor que 30 que no se puede descomponer en factores diferentes de 1 y él mismo.

U) $2^{10} = \quad = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

Verticales

A) Número que sirve de base a nuestro sistema de numeración

B) $6 \times 6 = \square = 6^2$

C) $(3 \times 5) + (2 \times 7)$

E) Entero mayor que 11 y menor que 19

F) Representación decimal de $\frac{41}{80}$ con cuatro decimales

G) Solución de $\quad -3\,075.32 = 4\,410.68$

H) Volumen en cm^3 de un cubo o hexaedro que mide 13 cm de lado.

J) Número de segundos que tiene una hora.

K) Numerador necesario para hacer equivalentes las siguientes fracciones: $\frac{39}{45} = \frac{\square}{15}$

L) Un número entero entre 60 y 66 que no es divisible por ningún entero distinto de 1 y él mismo.

O) $\frac{77}{5} \times \frac{5}{7} = \square$

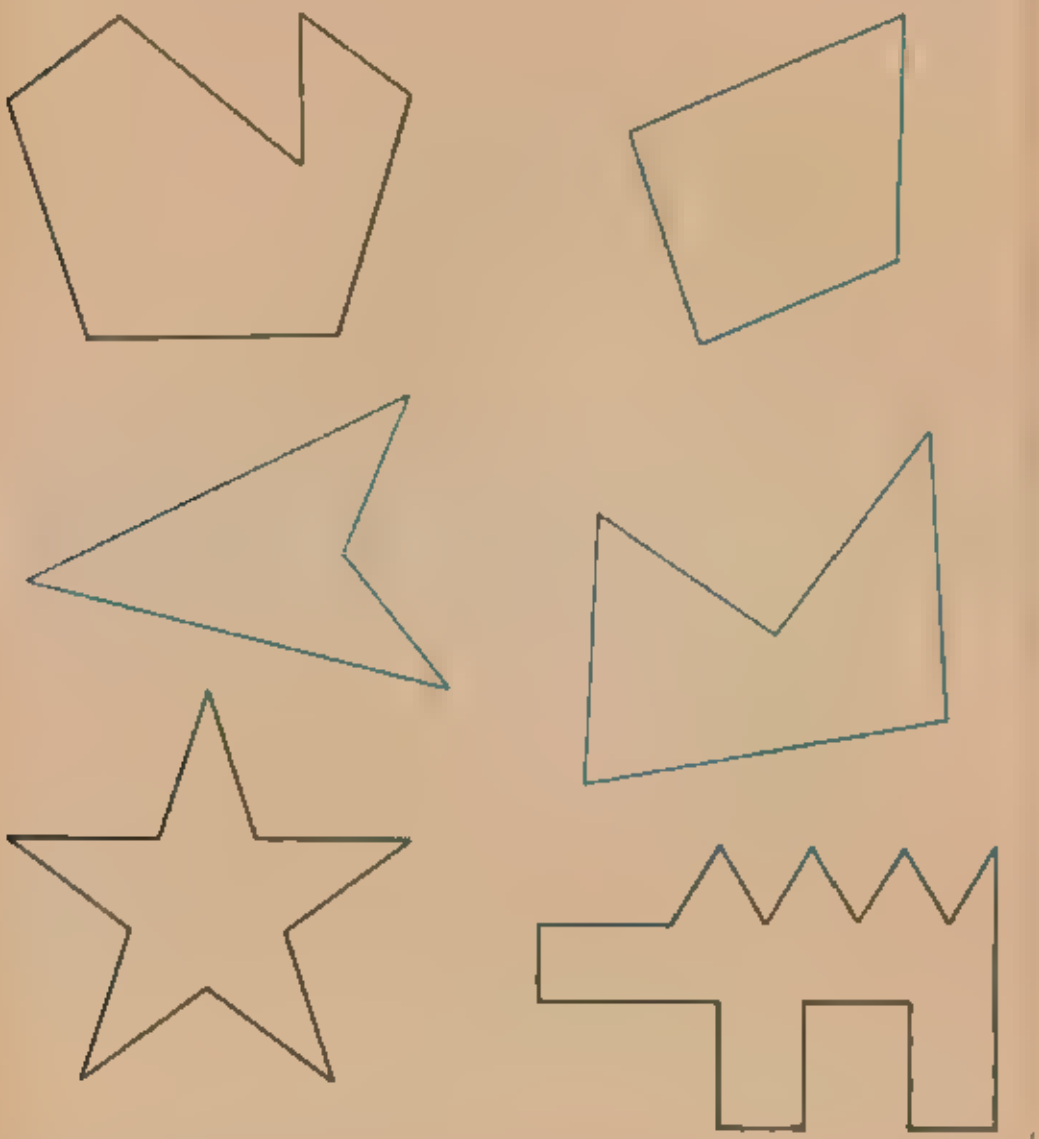
Q) Últimas dos cifras del año en que el hombre llegó a la Luna

S) Número que sigue en esta serie 5, 9, 13, 17,

T) Número de formas distintas en que puede combinar su camisa y pantalon un niño que tiene 6 camisas y 4 pantalones

Figuras planas y su área

Divide las siguientes figuras en triangulos, uniendo vértices y procurando usar el menor número posible de líneas. Colorea cada triangulo de un color diferente.



Una figura de lados rectos siempre puede descomponerse en triángulos, calcular su área no es tarea difícil, pues ya sabes calcular el área de un triángulo. Para calcular el area de una figura como las anteriores sumarías las áreas de los triángulos que componen la figura

En la vida diaria hay ocasiones en que se necesita encontrar el area de un poligono irregular, por ejemplo

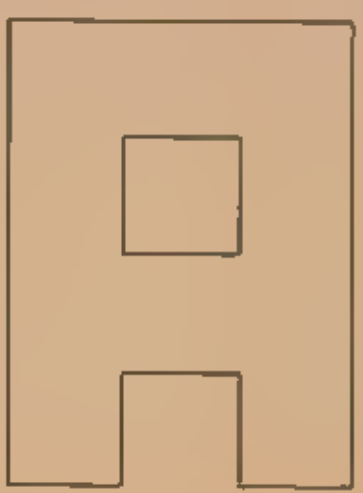
Un campesino tiene un terreno que está representado en esta figura, donde cada mm equivale a un metro

Escala
1 mm — 1 m

Si el campesino quiere plantar frutales, y por cada frutal necesita 2 m de terreno, ¿cuántos frutales puede plantar en su terreno?

Para resolver este problema deberas calcular primero el area del terreno para saber cuántos metros cuadrados tiene, despues podras saber cuántos frutales plantó.

Calcula en mm el area de estas figuras



¿Qué es el azar?

Esteban tiene 6 canicas y las va colocando sobre el agua que hay en un recipiente para ver si flotan o se hunden.

¿Sabes lo que le pasará a la primera canica que Esteban ponga sobre el agua?_____ ¿Por qué? _____

A la segunda canica, ¿qué le pasará? _____

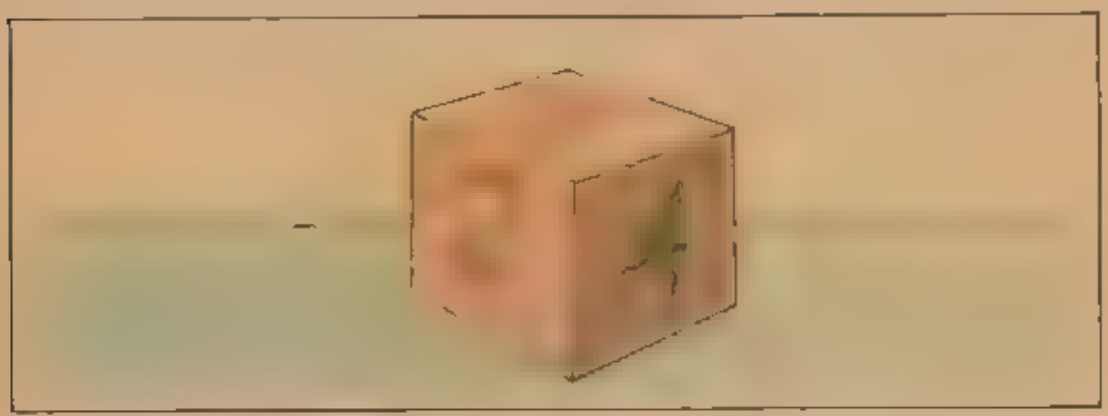
¿Qué les pasará a las otras 4 canicas? _____

¿Alguna canica quedará flotando? _____

¿Siempre pasa lo mismo? _____

¿Esteban puede saber con seguridad, antes de colocar una canica, lo que va a pasar? _____

Diego tiene un dado y en cada una de las 6 caras marcó un numero del 1 al 6, para practicar este juego: piensa un numero del 1 al 6, y luego lanza el dado para ver si el número de puntos que queda hacia arriba es el que pensó.



Si antes de la primera tirada Diego piensa el número 5, ¿es seguro que el dado cae con el 5 hacia arriba? _____

Si hace otro tiro, ¿caerá el 5? _____

Si hace muchos tiros, ¿nunca caerá el 5? ¿Tú qué crees? _____

¿Siempre caerá el número 3? _____

¿Nunca caerá el número 6? _____

Si tú pones una canica sobre el agua, ¿qué le va a pasar? _____

¿Puede Diego saber con seguridad, antes de lanzar su dado, cual número quedará arriba? _____

Si tú tiras el dado, ¿qué número quedará arriba? _____

Cuando no podemos saber con seguridad cual será el resultado de un experimento, decimos que es un experimento de **azar.**

Cuando podemos saber con seguridad cual será el resultado de un experimento, decimos que **no** es un experimento de **azar.**

Cuando tiramos el dado para adivinar el numero de arriba ¿es seguro que acertemos? _____ ¿Es un experimento de azar? _____

Cuando ponemos la canica sobre el agua para ver si se hunde, ¿es seguro que se hunda? _____ ¿Es un experimento de azar? _____

Si has comprendido la idea podras decir cuales de los experimentos siguientes son de azar y cuáles no lo son

Meter la mano en el agua para ver si se moja _____

Decir un número para comprobar si es el mismo que está pensando tu compañero _____

Sumergir una vela prendida en agua para ver si se apaga _____

Ponerle azúcar al cafe para ver si se endulza _____

Prender el radio para ver si están tocando tu canción favorita _____

Decirle a una persona desconocida el nombre de un mes y ver si en ese mes cae su cumpleaños _____

Comprar un boleto en una rifa para ver si te sacas el premio _____

Ir a un zoológico para ver si hay animales _____

Poner un pedazo de hielo al sol para ver si se funde _____

Jalarle la cola a un gato para ver si se enoja _____

Tirarse de un arbol para ver si podemos con los brazos _____

Estudiar para ver si aprendemos _____

Describe 3 experimentos de **azar.** _____

_____

_____

_____

Describe 3 experimentos que **no sean de azar.** _____

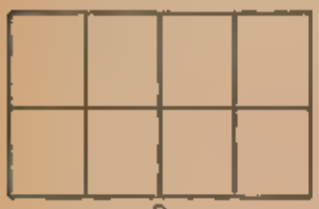
_____

_____

_____

Fracciones equivalentes

De cada rectangulo grande colorea la fraccion indicada abajo·



$\frac{2}{4}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{4}{8}$

Compara las regiones coloreadas.

¿Cómo son entre sí?_____

Por ello decimos que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{4}{8} = \frac{\square}{4}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{\square}{2}$$

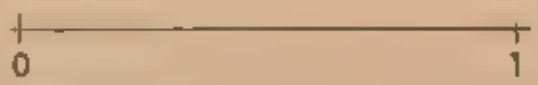
Se llaman **fracciones equivalentes** as que representan lo mismo

¿ $\frac{4}{8}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes? _____

¿Por qué?_____

Escribe una fraccion equivalente a $\frac{1}{2}$ .Esto se expresa $\frac{1}{2} =$

En este tramo de recta numérica marca el lugar donde colocarias las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$



Dos fracciones equivalentes están representadas por el mismo punto en la recta numérica. Dos fracciones equivalentes son el mismo número, por ello escribimos

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Dada una fraccion puedes obtener fracciones equivalentes a ella si multiplicas o divides su numerador y denominador por un mismo numero.

Completa de modo que resulten fracciones equivalentes

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times}{4 \times 7} = ____$

$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 2}{} =$

$\frac{20}{15} = \frac{20 : 5}{15 :} = ____$

$\frac{10}{18} = \frac{____}{18 : 2} = ____$

Obten de la misma manera 4 fracciones, equivalentes a cada una de las siguientes:

$\frac{3}{4} = __ = __ = ____ = ____$

$\frac{10}{18} = __ = ____ = ____ = ____$

$\frac{21}{28} = __ = ____ = ____ = ____$

$\frac{30}{60} = ____ = __ = ____ = ____$

$\frac{100}{20} = ____ = ____ = ____ = ____$

Cuando una fracción se transforma en otra equivalente pero con menor numerador y denominador se dice que se simplificó.

Simplifica

$\frac{4}{6} = \frac{____}{6 : 2} = \frac{2}{3}$

$\frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{____} = \frac{_}{4}$

$\frac{10}{25} = \frac{____}{____} = __$

$$\frac{6}{18} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{9}$$

La fracción $\frac{6}{18}$ se simplifico al escribirla como $\frac{3}{9}$, pero se puede simplificar más, házlo

$$\frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{\quad}{\quad}$$

Simplifica lo mas que sea posible

$\frac{18}{24} =$

$\frac{27}{45} =$

$\frac{100}{200} =$

$\frac{80}{150} =$

$\frac{256}{1024} =$

Escalas

En una fotografía, los objetos que aparecen en ella son reproducciones a escala de los objetos reales.

El ancho real del letrero de la tlapalería que aparece en esta foto es 0 80 m.

Anota aquí el ancho que tiene ese letrero en la fotografía_____

Comparando el ancho real con el ancho en la foto, encuentra la escala a la que esta fotografía reproduce la realidad._____ a_____.

En la fotografía, ¿cuál es la altura de la caseta del teléfono?_____

Sabiendo la escala, calcula la altura real de esa caseta de teléfono

A partir de medidas tomadas de la fotografía y teniendo en cuenta la escala, encuentra la medida real de:

altura de una escoba _____

altura de la casa _____

ancho de la puerta _____

altura de la banqueta _____

altura de la cubeta de metal _____

estatura de alguna de las personas que están en el teléfono _____

el largo de la estufa _____

Encuentra el area real del letrero y el área del mismo en la fotografía, ¿qué relación hay entre ellas? _____

Encuentra la circunferencia de un círculo cuyo diámetro mide 1 cm.

C = _____

¿Cuánto mide la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es el doble del anterior (2 cm)?

C = _____

Este círculo está a escala _____ a _____ del primero.

Si trazo un círculo a escala 5 a 1 del primero, su diámetro será _____ y su circunferencia medirá _____.

Si trazamos un círculo a escala 1 a 2 del primero, su diámetro será _____ cm y su circunferencia medirá _____

Un círculo de 15 cm de diámetro, ¿es una reproducción a escala del primero? _____

¿a qué escala? _____

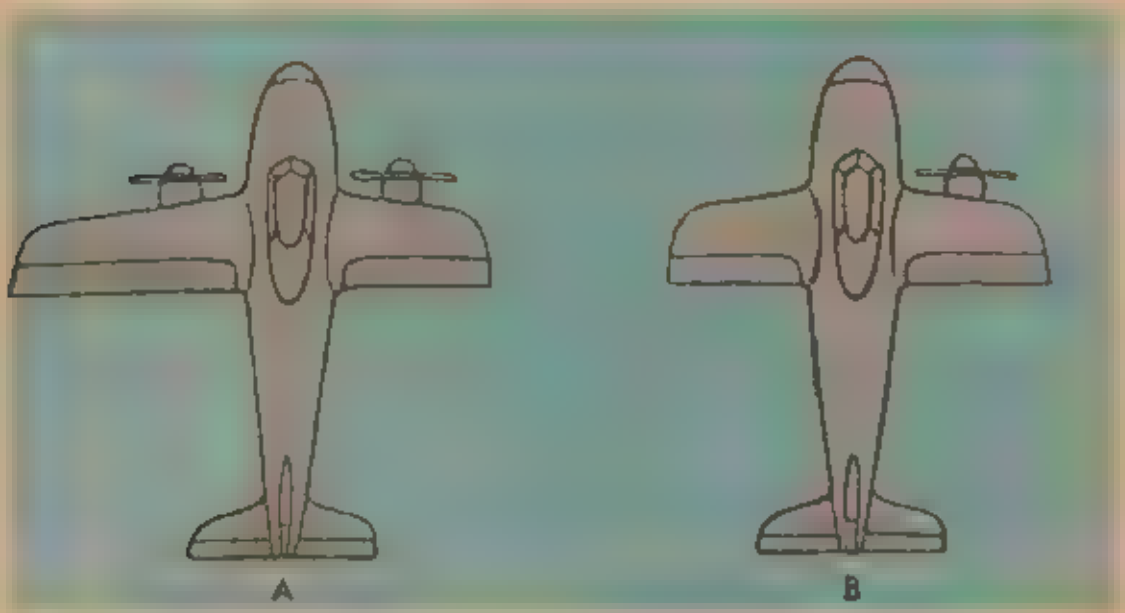
¿Podemos afirmar que un círculo es una reproducción a escala de cualquier otro? _____ ¿Por qué? _____

Usos de la simetría

Una mariposa y un pájaro son simétricos respecto al eje de su cuerpo.

Los aviones se fabrican con una simetría similar a la de la mariposa y el pájaro.

Estos aviones no los hicieron simétricos



¿Qué pasará con el avión A? _____

¿Qué pasará con el avión B? _____

Las balanzas se hacen simétricas, aquí hay dos balanzas

Una es simétrica, la otra no lo es. ¿Qué pasará al pesar en la balanza no simétrica, si el brazo largo es el doble del brazo corto?

_____

_____

Puedes hacer una comprobación experimental.
Conoces este tipo de triángulos

equilátero **isósceles** **escaleno**

¿Cuantos ejes de simetría tiene el triangulo equilátero? Trázalos. _____

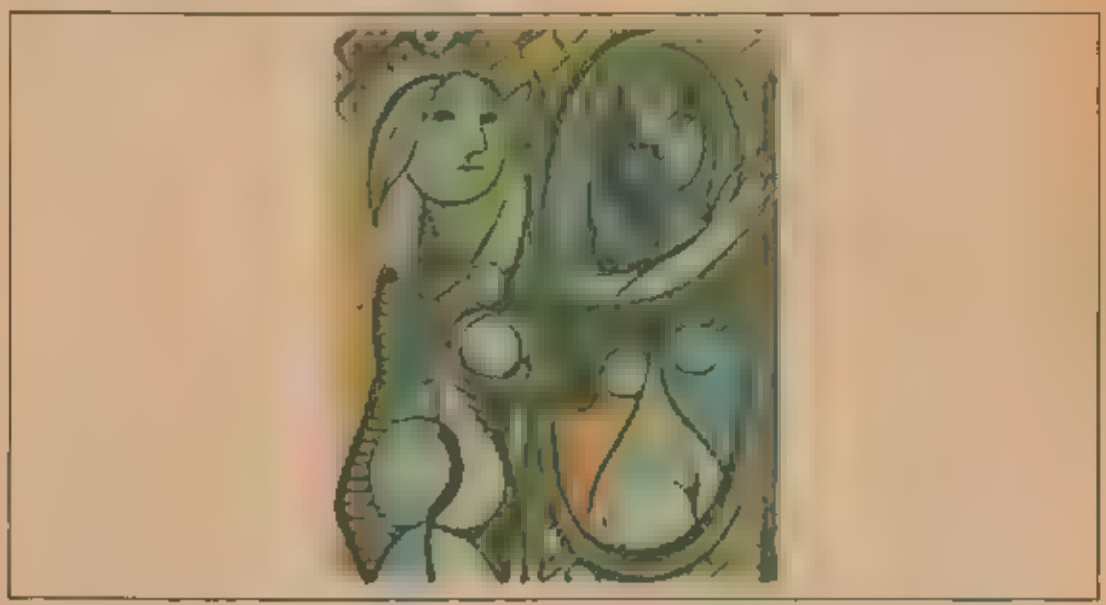
Haz lo mismo para los otros dos triangulos.

La simetria te clasifica los triángulos.

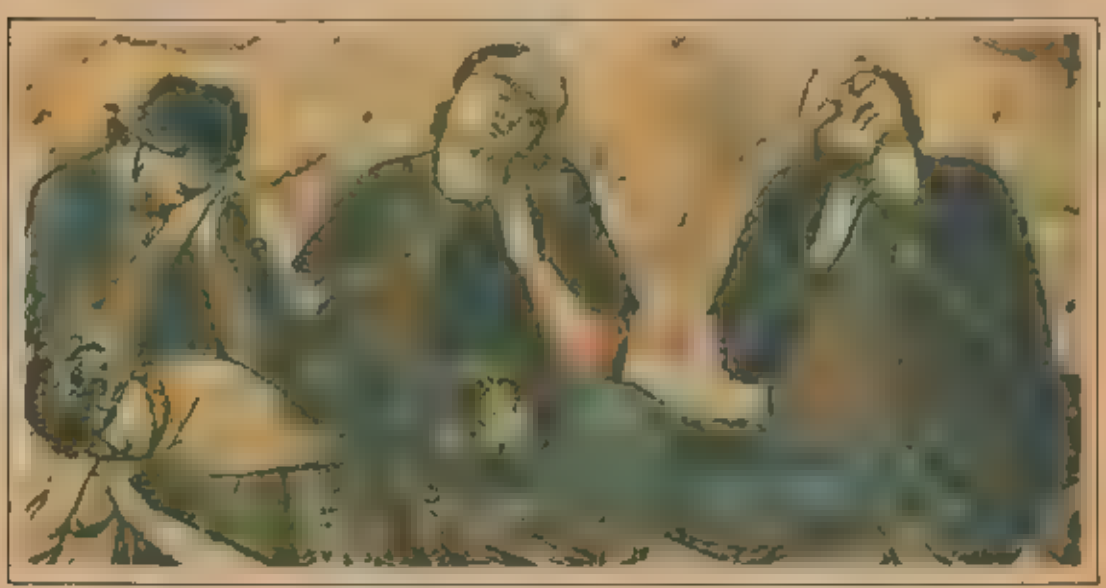
Haz una clasificacion de los cuadrilateros que conoces segun el número de ejes de simetria que tengan. _____

Los p ntores tamb én usan la simetria en la composic·on de sus cuadros.

Esta ilustracion es parte de un cuadro de un p'ntor italiano llamado E Giotto, qu'en vivio en el siglo XIII.



Esta otra ilustracion es de Pablo Picasso, pintor contemporaneo, fallecido en 1973.

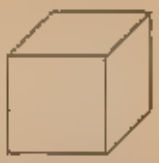


Discutan en clase el uso de la simetria en los cuadros de Giotto y Picasso.

¿Cómo llamarías al cuadro de Picasso? _____

_____

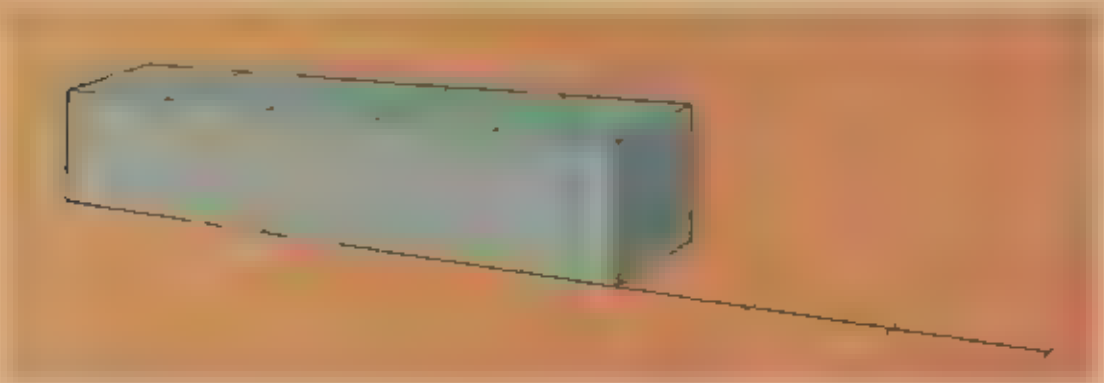
Volúmenes



Vamos a recordar qué cosa es el **volumen** de un cuerpo.

Nicolas tiene muchos dados iguales, como el que aquí se representa.

Primero va a formar con ellos una hilera como la que se muestra en la figura

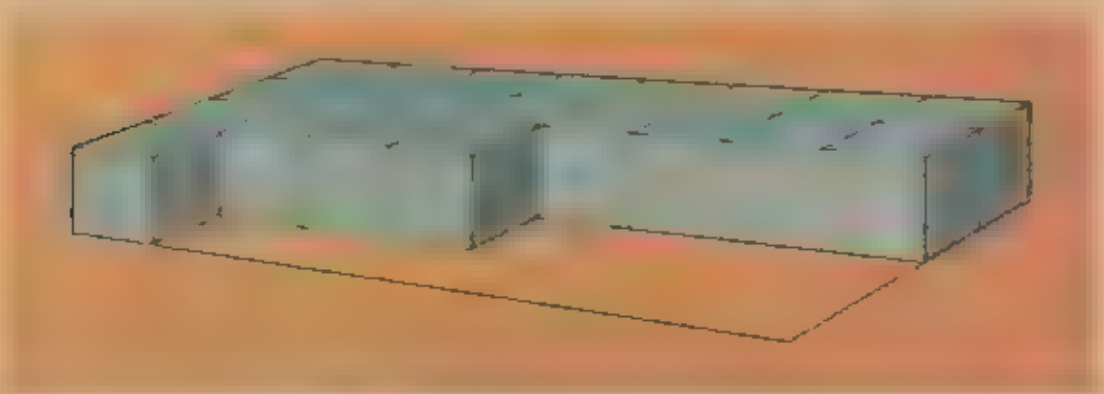


¿Cuántos dados ha colocado? _____

¿Cuántos dados va a ocupar en todo el largo de la hilera marcada?

_____

Con hileras de mismo largo va a formar una capa como ésta:



¿Cuántos dados ha colocado?

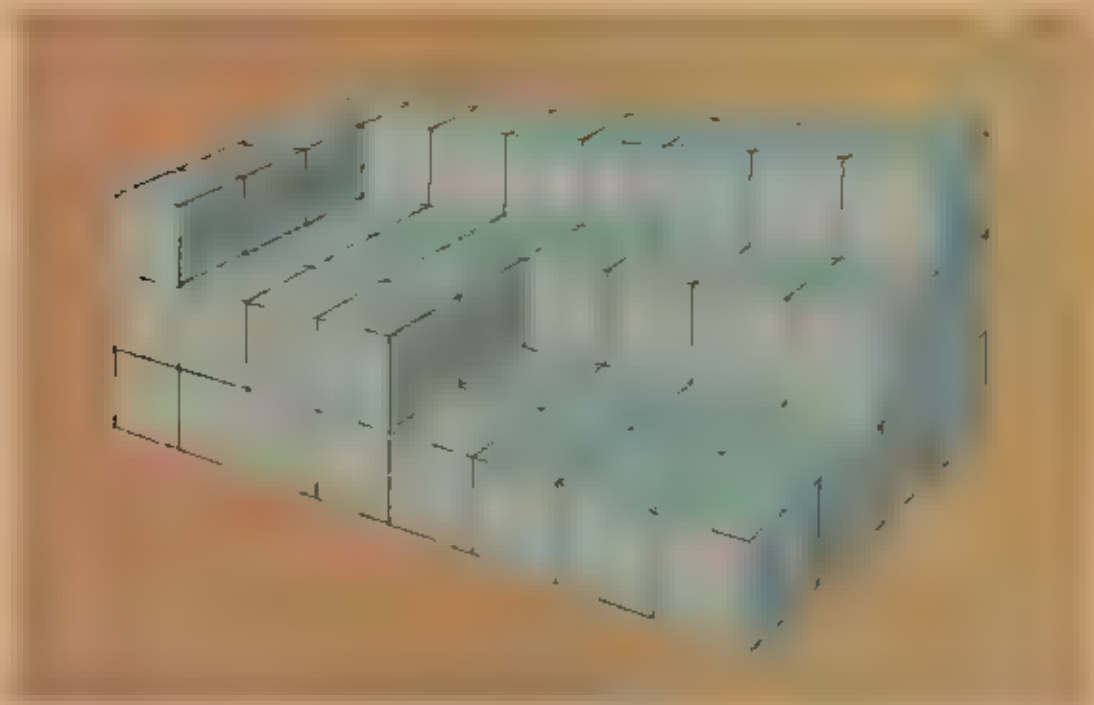
_____

¿Cuantos dados caben a lo largo de esta capa?_____

¿Cuántos dados caben a lo ancho de esta capa?_____

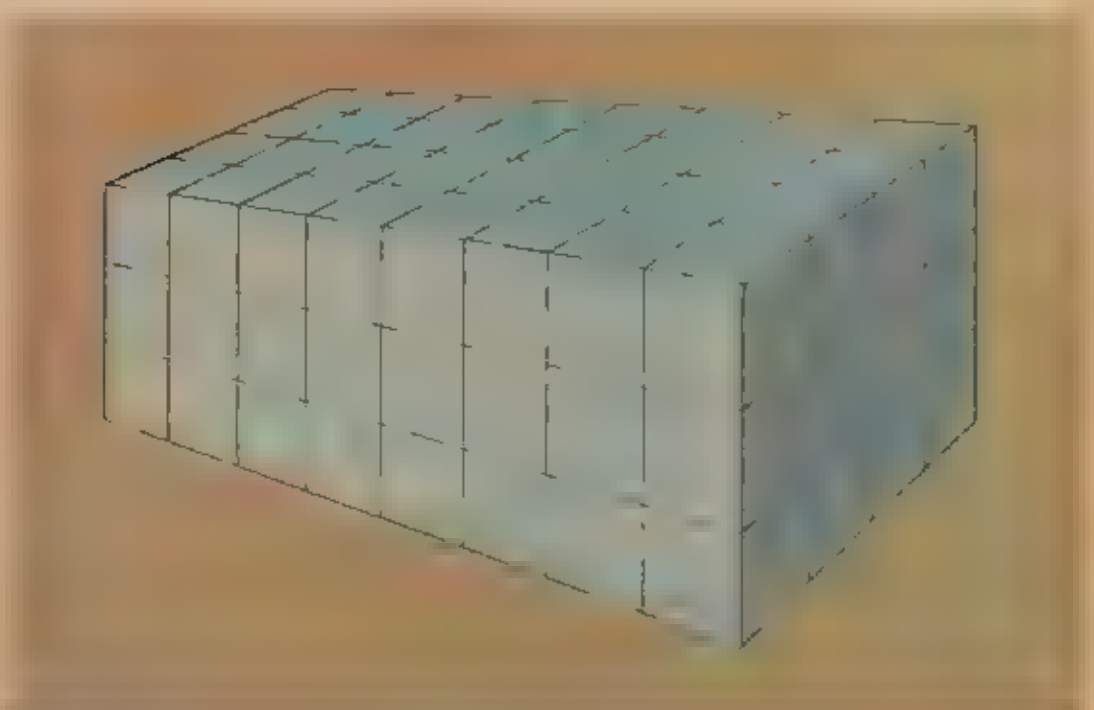
¿Cuantos dados se necesitan en total para formar la capa?_____

Ahora va a colocar varias capas, una encima de la otra, así



¿Cuántas capas de altura tiene este cuerpo?_____

¿Cuantos dados necesita en total para formar el cuerpo ilustrado abajo?_____



Este cuerpo suele llamarse **prisma.**

Si el prisma hubiera tenido 5 capas de alto, ¿cuantos dados habría necesitado? _____

Si formara un prisma de 6 dados de largo, 4 de ancho y 4 de alto, ¿cuántos dados ocuparía? _____

Si cada uno de esos dados es un centímetro cúbico (cm), el volumen del primer prisma en lugar de expresarse como 96 dados se expresa como 96 cm^3.

El volumen del segundo prisma en cm^3 es de _____

El volumen del tercer prisma en cm^3 es de _____

Ahora Nicolás construye un prisma de 10 cm de largo, 6 de ancho y 4 de alto, ¿cual es su volumen en cm^3?

Observa que para encontrar el numero de dados que forman el prisma, primero encontramos el numero de dados que forman la primera capa (area de la base) y lo multiplicamos por el número de capas (altura). Esto se puede resumir así:

Volumen de un prisma = área de la base × altura

Problemas de distancias

De Celaya a Dolores Hidalgo hay 91 km sobre la carretera que los une.

A partir de Celaya, en el kilometro 25 está Comonfort y en el kilómetro 52 está San Miguel de Allende.

La siguiente línea recta representa la carretera que une dichos poblados. Escala: 1 mm representa 1 km. Localiza en ella las otras poblaciones.

Celaya

Dolores Hidalgo

¿Qué distancia hay entre Comonfort y Dolores Hidalgo? _____

¿Qué distancia hay entre San Miguel de Allende y Dolores, Hgo.?

_____

De las cuatro poblaciones que se mencionan, ¿cuáles son las dos más cercanas?_____ y _____

Si 7 km antes de Comonfort hay un crucero con la vía del ferrocarril, ¿en qué kilómetro de la carretera está el crucero?_____

Localízalo en la recta que representa la carretera.

A un automovilista que va de San Miguel de Allende a Celaya, se le descompone su coche después de recorrer 15 km, ¿qué poblado le queda más cerca para ir por un mecánico? _____

¿En qué kilometro dejó su auto?_____

Una familia de campesinos tiene su casa en el kilometro 31 de esta carretera, ¿en qué poblado es más conveniente que inscriban a los niños a la escuela, si tienen que irse caminando? _____.

Lógica

Observa la ilustracion anterior y después dí s' cada una de las 20 proposiciones que se forman con los sigu'entes renglones y columnas es falsa o verdadera.

	tienen alas	se mueven por sí mismos	son verdes	tienen vidrios	respiran
Todos estos animales					
Algunos de estos animales					
Algunos de estos vehiculos					
Todas estas casas					

Azar y probabilidad

Decíamos antes que hay azar cuando no estamos seguros del resultado de una acción que ejecutamos. Por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire no estamos seguros de si caiga aguila o sol, es decir, en el resultado de caer águila o sol hay azar. Lo que queremos ver ahora es que el azar podemos **medirlo** en forma numérica, de la misma manera en que medimos áreas o volúmenes.

El azar lo vamos a medir en términos de qué tan seguros estamos de obtener el resultado deseado y el número que le asignaremos se llama **probabilidad.**

Vamos a ilustrar esto en uno de los casos mas sencillos, el de echar un volado:

Si tiramos la moneda al aire, ¿qué tan seguros estamos de que sucedan algunas cosas de las siguientes?

1. Que la moneda no caiga al suelo
2. Que la moneda caiga al suelo.
3. **Que caiga águila.**

En condiciones normales (que nadie meta la mano y se lleve la moneda) estamos seguros de que lo primero no sucederá. Por el contrario, de lo segundo estamos seguros de que sí sucederá. A lo que estamos seguros que no sucederá, le damos el valor cero, decimos que tiene **probabilidad cero.**

A lo que estamos seguros que sí sucederá, le damos el valor 1, decimos que tiene **probabilidad uno.**

¿Qué haremos en un caso como el tercero? No estamos seguros de que caiga aguila, pero tampoco estamos seguros de que no caiga **águila.**

¿Qué cosas pueden pasar? Puede ser que caiga aguila o que caiga sol y no hay razon para pensar que un caso sea mas favorable que otro.

¿Que valor crees que deberíamos asignarle al caso 3, el de que caiga águila?

Para ayudarte a encontrar la respuesta piensa en lo siguiente. el que la moneda caiga es un hecho seguro, tiene probabilidad uno, pero este hecho se descompone en dos, que caiga aguila o que caiga sol. Por lo tanto, el hecho de que caiga águila o sol es un hecho seguro, tiene probabilidad uno El que caiga aguila solamente es parte de un hecho seguro ¿Se te ocurre ya qué valor asignarle a este caso?

Si tienes un rectángulo de area 1 y lo divides en dos partes iguales, ¿qué área tiene cada parte? Ahora debes ya de ver cuál es la respuesta.

Estudia esta otra situación.

En una caja hay tres canicas, una verde, una azul y otra amarilla

Sin mirar, alguien mete la mano en la caja para sacar una canica y ver su color.

¿Es éste un experimento de azar? _____

¿Por qué? _____

Seguro que saca una canica. Sacar una canica tiene probabilidad _____ .

No sacar una canica es imposible No sacar una canica tiene probabilidad _____ .

Hay en total 3 canicas, cada una de un color diferente. Sacar una canica verde no es seguro, pero tampoco imposible.

De las 3 canicas solo 1 es verde, la probabilidad de sacar una canica verde es $\frac{1}{3}$.

¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica azul? _____ ¿Por qué? _____

¿Cual es la probabilidad de sacar una canica amarilla? _____ ¿Por qué? _____

¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica verde o azul ?___

¿Por qué? _____

¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica amarilla o azul?

¿Por qué?_____

¿Cuál es la probabilidad de sacar una canica verde o azul o amarilla?_____¿Por qué?

Si has entendido la idea podrás resolver la actividad que te proponemos a continuación.

Sin mirar, Paulina tiene que sacar un listón de una caja. La caja contiene 25 listones rojos, 12 azules, 10 verdes, 10 amarillos y 3 morados, todos del mismo tamaño.

¿Cuántos listones tiene la caja? ___

Sacar un liston para ver de qué color es, ¿es un experimento de azar?

¿Qué color es más probable que saque, rojo o morado?

¿Por qué?

¿Cual es menos probable que saque, un azul o un verde?

¿Hay dos colores que tengan la misma probabilidad de ser sacados?_____ ¿Cuáles son?

¿Por qué?

¿Cual de todos los colores es más probable sacar?

Dale valor a:

La probabilidad de que saque amarillo

La probabilidad de que saque morado

La probabilidad de que saque rojo

¿Cual es la probabilidad de que el liston que saque sea azul o morado?

¿Cual es la probabilidad de que el listón que saque sea verde o amarillo o rojo?

¿Cuál es la probabilidad de que el liston que saque sea rojo o azul, o verde o amarillo, o morado?

Si sacó un liston cuyo color tiene probabilidad $\frac{1}{5}$ ¿de qué color es?

Si saco uno cuya probabilidad es $\frac{1}{6}$ ¿de qué color es?

¿Cuál es la probabilidad de que saque un listón blanco?

¿Por qué?

¿Cual es la probabilidad de que saque un liston de cualquier color?

¿Por qué?

¿Qué es mas probable, sacar un liston rojo o uno no rojo?

¿Qué es más probable, sacar un liston azul o uno no morado?

Monedas extranjeras y tipos de cambio

A continuacion te damos una lista de paises en a que aparece el nombre de su moneda y el valor de esta moneda en pesos mexicanos Se trata de que aprendas a convertir cantidades en dinero de una moneda a otra Debera hacerse una discusion en clase de cada uno de los casos de conversion de monedas que se señalan más adelante.

Monedas extranjeras (datos de 1972)

Pais	Nombre de la Moneda	Valor en pesos mexicanos por unidad de moneda
Alemania	Marco	3.92
Argentina	Peso nuevo	1.29
Bolivia	Boliviano	1.06
Brasil	Cruzeiro	2.13
Canadá	Dólar	12.72
Ceilán	Rupia	2.02
Cuba	Peso	12.50
China (Rep Popular)	Jen Min Pao	5 08
Egipto	Libra	36.03
Estados Unidos	Dolar	12.50
Francia	Franco	2.50
Grecia	Dracma	0.45
Guatemala	Quetzal	12 51
Honduras (Rep.)	Lempira	6.26
Japón	Yen	0.04
Jordania	Denario	35.71
Panamá	Balboa	12.51
Paraguay	Guaraní	0.10
Perú	Sol	0.29
U.R.S.S.	Rublo	15.25
Yugoslavia	Dinar	0.77

¿Como convertimos una cantidad en moneda extranjera a pesos mexicanos?

Haz estas conversiones:

3 marcos alemanes = pesos mexicanos

5 dólares canadienses = pesos mexicanos

10 cruzeiros = _____ pesos mexicanos

6 balboas = _____ pesos mexicanos

25 rublos = _____ pesos mexicanos

16 quetzales = _____ pesos mexicanos

7 dracmas = pesos mexicanos

¿Como convertiríamos una cantidad en pesos mexicanos a moneda extranjera?

_____

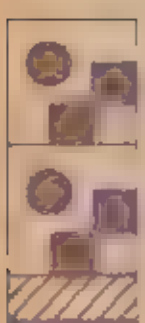
Haz estas conversiones

10 pesos mexicanos = _____ libras

7 pesos mexicanos = _____ yenes

12 pesos mexicanos = _____ francos

5 pesos mexicanos = _____ pesos cubanos



22 pesos mexicanos =_____rupias

30 pesos mexicanos =_____bolivianos

16 pesos mexicanos =_____soles

¿Como convertiríamos una cantidad de moneda extranjera a otra moneda extranjera?

Haz estas otras conversiones

5 libras =_____soles

2 jen min paos =_____dólares americanos

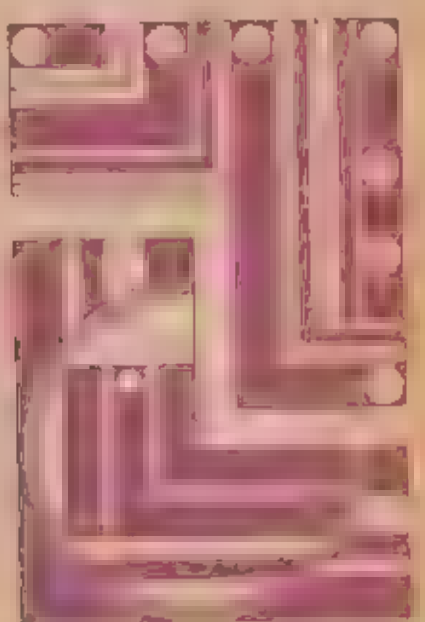
7 quetzales =_____guaraníes

12 dinares =_____rublos ,

25 lempiras =_____cruzeiros

14 denarios =_____dracmas

100 balboas =_____rupias



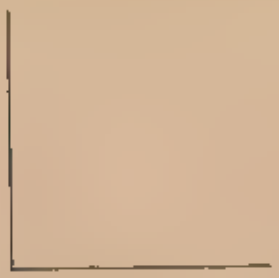
Angulos y polígonos

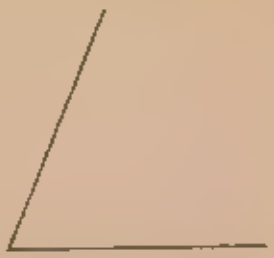
Si un segmento de recta se hace girar sobre uno de sus extremos describe un ángulo.

Si un segmento se hace girar una vuelta completa sobre uno de sus extremos, el otro extremo describe una circunferencia y se dice que este ángulo mide 360°.

Cuando ese segmento describe media circunferencia formará un ángulo de_____

Si describe un cuarto de circunferencia forma un ángulo de _____

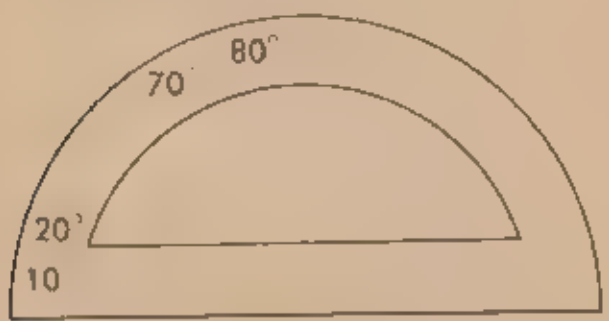




Si describe un quinto de circunferencia forma un ángulo de _____

Para medir directamente ángulos, se usa el transportador.

En la figura de abajo se ilustra el uso de un transportador para trazar el ángulo de 72°.

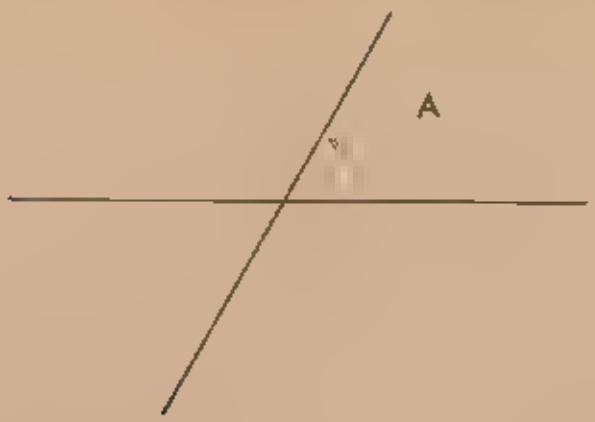


_____

Si un segmento describe un giro de un sexto de circunferencia, forma un ángulo de _____

Con ayuda de un transportador trázalo aquí.

Siempre que dos rectas se intersectan, determinan ángulos, podemos medirlos:



La medida del ángulo A es

Ponle una letra a los tres ángulos y anota aquí sus medidas

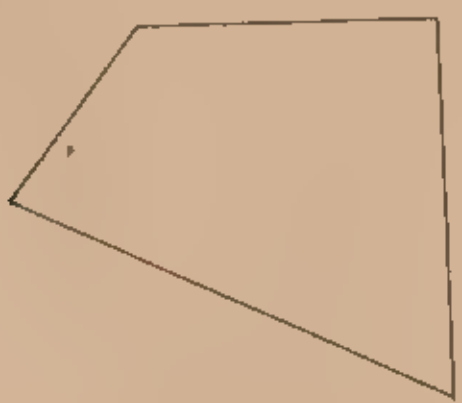
el ángulo___mide_____

el ángulo___mide_____

el ángulo___mide_____

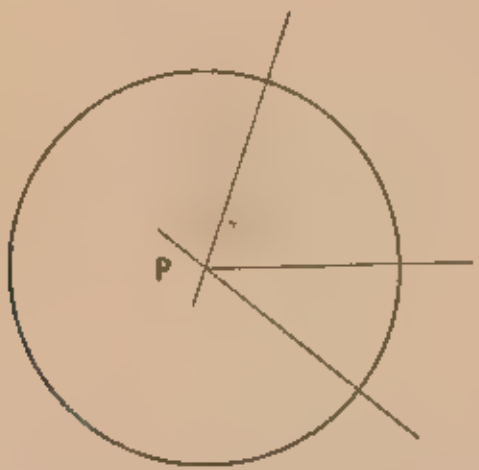
¿Qué observas en la medida de estos 4 ángulos?

Mide los ángulos internos de este cuadrilátero.



Si se necesita trazar un polígono regular de 5 lados, se puede hacer dividiendo una circunferencia en 5 ángulos iguales, ¿cuanto mediría cada uno de esos ángulos? _____

En la siguiente circunferencia traza los ángulos que faltan y obten el polígono.



Observa que el punto P, centro de la circunferencia, es también centro del polígono. Por esta razon a cada uno de estos angulos se le llama **ángulo central.**

En tu cuaderno traza un polígono regular de 6 lados (hexágono)

¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos centrales? _____

¿Canto mide el ángulo central de un octágono? _____

¿Cuánto mide el ángulo interno de un pentágono? _____

¿Cuánto mide el ángulo interno de un hexágono? _____

¿Cuánto mide el ángulo interno de un octagono? _____

Discute con tus compañeros y maestro un procedimiento para trazar un polígono regular, sin necesidad de la circunferencia, conociendo solamente la medida de sus lados y sus ángulos internos

En tu cuaderno traza un triángulo cualquiera. Mide sus ángulos internos y súmalos.

¿Cuánto suman los tres ángulos? _____

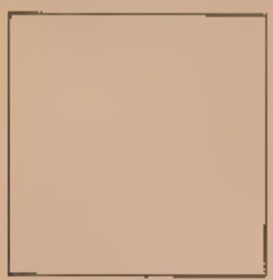
Compara este resultado con los de tus compañeros, los que seguramente dibujaron triángulos diferentes al tuyo.

¿Cuánto obtuvieron como suma de los ángulos internos de un triangulo cualquiera? _____

Se tienen mosaicos cuadrados.

¿Puedes cubrir un piso sin dejar huecos entre los mosaicos?

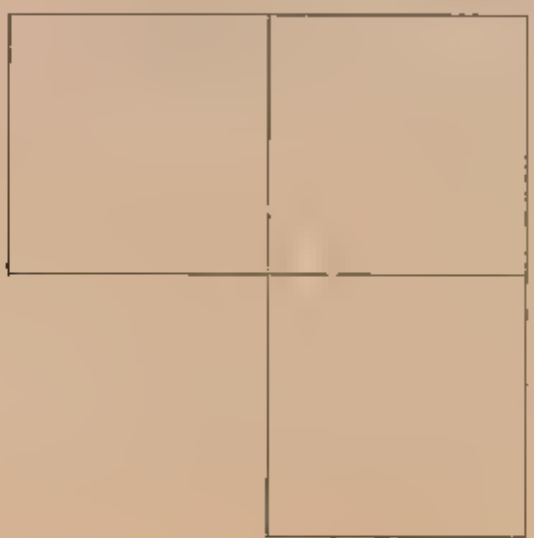
Tomando un mosaico vemos que uno de sus ángulos internos mide 90°.



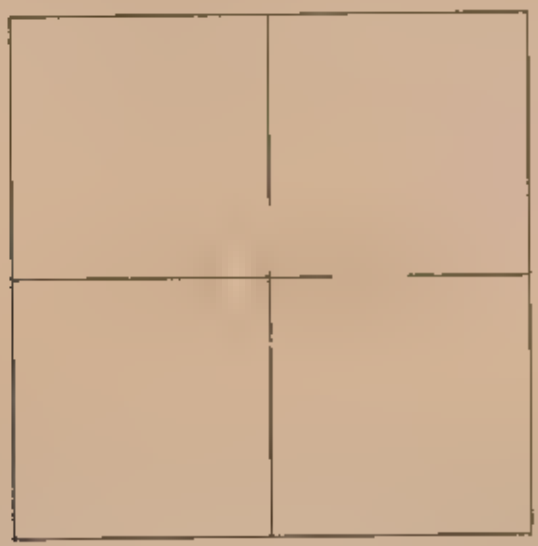
Si colocamos junto a él otro mosaico, entre los dos forman un ángulo de _____

el ángulo formado es de _____

Colocando otro que coincida en el vértice de los anteriores



El hueco que queda es de 90 lo que quiere decir que allí cabrá otro mosaico para hacer el total de 360 .



Y así se pueden ir anexando mosaicos sin dejar huecos entre ellos.

Con mosaicos en forma de hexagonos regulares, ¿puedo cubrir un piso sin dejar huecos entre los mosaicos?

Veamos·

¿Cuánto mide el ángulo interno de un hexágono regular?_____

¿Cuantos mosaicos se necesitan para cerrar la circunferenc'a?_____

¿Se puede cubrir el piso con mosaicos hexagonales sin dejar huecos entre ellos? _____

Haciendo los cálculos que necesites dí si es posible o no cubrir un piso con mosaicos en forma de pentágono regular y por qué.

Porcentaje

Probab emente tú has observado que con mucha frecuencia se da información acerca de algo en "tantos de cada cien", hasta se ha hecho la frase 'tanto por ciento", que se representa con el símbolo %.

Frecuentemente oyes frases como éstas

Gastamos en comida el 50% (50 por ciento) de lo que gana mi papá.

En esa farmacia hacen el 20% de descuento

El 21% de la troposfera es oxígeno

El alza de precios fue del 45%.

El 70% de la superficie terrestre está cubierta por agua.

El aumento de salarios fue del 20%

El banco presta al 10% anual.

Por lo tanto es importante que tú aprendas a interpretar esa información que se da en tantos por ciento ' y que significa ' tantos de cada 100".

Para llevar a cabo esta interpretación recuerda que la fracción $\frac{2}{5}$ significa que part mos un entero en 5 partes iguales y tomamos 2 de esas 5, si tomamos 4 de esas 5, decimos que hemos tomado $\frac{4}{5}$

Si de 8 partes iguales tomamos 3, hemos tomado $\frac{3}{8}$

Si de 15 partes tomamos 7, hemos tomado —

Si de 10 partes tomamos 9, hemos tomado —

Si tomamos 5 partes de un total de 12, hemos tomado —

Si tomamos 47 partes de un total de 50, hemos tomado —

Si tomamos 4 partes de cada 75, hemos tomado —

Si tomamos 27 partes de cada 70, hemos tomado —

Si tomamos 80 partes de cada 100, hemos tomado

30% significa 30 de cada 100, o sea $\frac{30}{\quad}$

25% significa___ de cada___, o sea $\frac{25}{100}$

48% significa___de cada___, o sea $\frac{\quad}{\quad}$

1% significa___de cada___, o sea $\frac{\quad}{\quad}$

Un señor tiene $3,000 de sueldo, al mes.

Si gasta al mes 20% en renta
¿Cuánto paga al mes de renta?

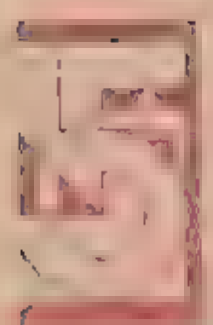
Si gasta al mes 50% en alimentos
¿Cuanto gasta al mes en alimentos?

Si gasta al mes 10% en ropa
¿Cuánto gasta al mes en ropa?

Si gasta al mes 10% en transportes
¿Cuanto gasta al mes en transportes?

Si debe pagar al mes 5% de impuestos
¿Cuanto paga al mes de impuestos?

¿Cuánto dinero le sobra para otras cosas?



Completa el siguiente cuadro:

Tanto por ciento	%	En fraccion comun de denominador 100	En fraccion comun simplificada	En forma decimal
25 por ciento	25%	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	25
50 por ciento		$\frac{50}{100}$		5
	60%		$\frac{3}{5}$	
		$\frac{20}{100}$		
			$\frac{7}{10}$	
				.16
18 por ciento				
	45%			
			$\frac{3}{8}$	
	150%			
83 por ciento				
		$\frac{75}{100}$		
				.28
0.5 por ciento				

Cuando tengas que calcular un tanto por ciento, lo puedes expresar del modo que mas te convenga para facilitar tu trabajo

Para calcular el por ciento de alguna cantidad basta multiplicar esa cantidad por la fracción que representa el porciento de que se trate

Por ejemplo, si queremos calcular el 25% de 275 podemos hacerlo utilizando la fracción común con denominador 100:

$$\frac{25}{100} \times 275 = \frac{6875}{100} = 68.75$$

También puedes usar una fracción común simplificada:

$$\frac{1}{4} \times 275 = \frac{275}{4} = 68.75$$

Otra manera de proceder es utilizando la forma decimal de la fracción:

$$0.25 \times 275 = 68.75$$

Calcula los siguientes porcentajes:

50% de 122 = _____

18% de 34 = _____

60% de 200 = _____

45% de 73 = _____

70% de 140 = _____

16% de 16 = _____

0.5% de 20 = _____

25% de 100 = _____

Fracciones equivalentes

Relaciona con el signo (~) las fracciones que son equivalentes y con el signo de desigual ($\neq$) las que no son equivalentes.

$\frac{4}{6} \square \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{2}{7} \square \frac{2}{6}$

$\frac{5}{8} \square \frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{5}{3} \square \frac{15}{9}$

Fíjate en lo siguiente: que sólo en las fracciones equivalentes los productos "cruzados": numerador de una por denominador de la otra, son iguales

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ porque $4 \times 3 = 2 \times 6$
$12 = 12$

$\frac{2}{7} \neq \frac{2}{9}$ porque $2 \times 6 \neq 2 \times 7$
$12 \neq 14$

Comprueba con el producto cruzado si los siguientes pares de fracciones son equivalentes o no, y relaciónalos con el signo correspondiente ($=$ ó $\neq$).

$\frac{12}{15} \square \frac{8}{10}$ porque $12 \times 10 \square 8 \times 15$

$\frac{7}{9} \square \frac{8}{10}$ porque 7×10

$\frac{9}{12} \square \frac{12}{16}$ porque

$\frac{5}{35} \square \frac{7}{49}$ porque

$\frac{2}{7} \square \frac{7}{2}$ porque

$\frac{5}{6}$ $\square$ $\frac{25}{30}$ porque

$\frac{4}{5}$ $\square$ $\frac{5}{6}$ porque

$\frac{3}{17}$ $\square$ $\frac{5}{8}$ porque

$\frac{8}{22}$ $\square$ $\frac{20}{55}$ porque

$\frac{3}{9}$ $\square$ $\frac{9}{27}$ porque

Usando la propiedad de la igualdad de los productos "cruzados", se puede encontrar un término desconocido en una de las fracciones equivalentes.

Ejemplo: $\frac{\square}{6} = \frac{15}{18}$ entonces $\square \times 18 = 15 \times 6$

$\square \times 18 = 90$

o bien

$\square = 90 \div 18$

$\square = 5$

$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$

$\frac{\square}{4} = \frac{7}{28}$ entonces $\square$

$\frac{5}{\square} = \frac{10}{14}$ entonces $\square$ =

$\frac{9}{8} = \frac{\square}{56}$ entonces $\square$ =

$\frac{7}{25} = \frac{\square}{100}$ entonces $\square$ =

$\frac{16}{12} = \frac{\square}{3}$ entonces $\square$ =

$\frac{6}{11} = \frac{66}{\square}$ entonces $\square$ =

$\frac{\square}{200} = \frac{1}{40}$ entonces $\square$ =

$\frac{5}{\square} = \frac{45}{9}$ entonces $\square$ =

Un problema de albañilería

El señor Alvarez tuvo que poner en su casa un tramo de 11 m de drenaje para conectarse con el drenaje de la calle. Los costos de los materiales son los siguientes:

Tubo de drenaje a $ 7.50 el metro

Coladeras a $20.00 cada una

Tapas de registro a $30.00 cada una

Si utilizo dos coladeras y dos tapas de registro y además gasto $43.00 en arena y cemento ¿cuál es el total de gastos en material?

Si en mano de obra gasta el 75% de lo que gastó en materiales, ¿cuánto pagó por mano de obra?

¿Cuánto le costó el drenaje?

¿Cuánto le costó el metro de drenaje?

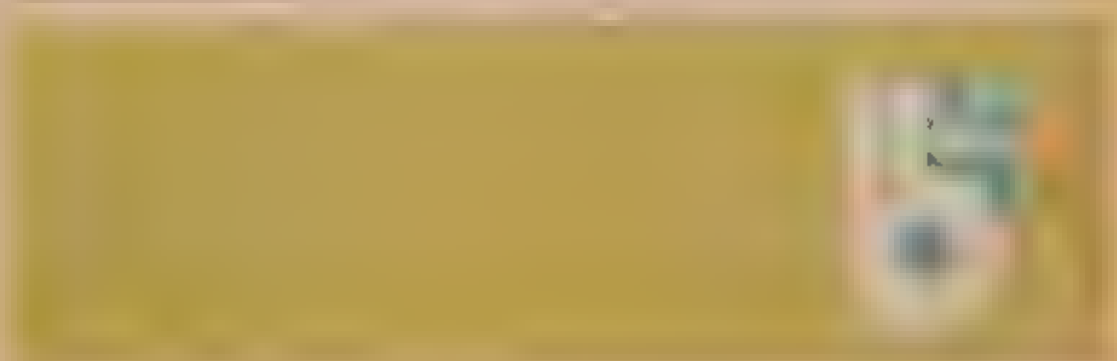
¿Crees que los tubos del drenaje deban colocarse horizontalmente?

¿Por qué?

¿Como crees que deben colocarse?

Se recomienda una inclinación de 3 cm por cada 2 metros, es decir, que entre dos puntos a dos metros de distancia, a lo largo del tubo, haya un desnivel de 3 cm.

¿Si tú fueras albañil como te asegurarías de que el tubo de drenaje tenga la inclinación recomendada?

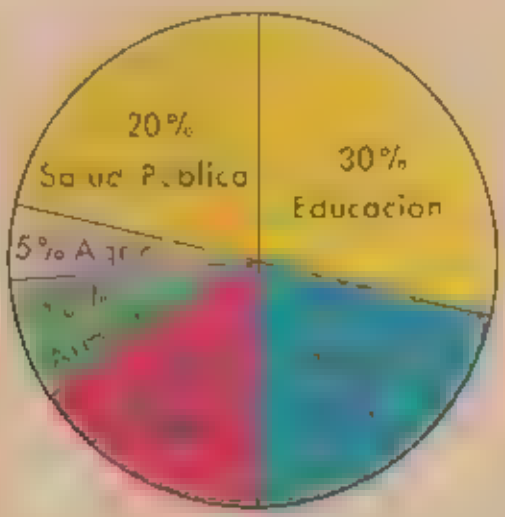


Uso del porcentaje

El presupuesto anual del gobierno de un país es de 500,000,000 (quinientos millones) de pesos. Este presupuesto se va a repartir de la siguiente manera:

Educación	30%	Armada	10%
Salud Pública	20%	Obras Públicas	15%
Agricultura y Ganadería	5%	Otros	20%

El reparto del presupuesto suele hacerse ver gráficamente como sigue:



Al finalizar el año el gobierno reporta haber hecho los siguientes gastos:

Educación	112,000,000 pesos	Armada	76,000,000 pesos
Salud Pública	110,000,000 pesos	Obras Públicas	57,000,000 pesos
Agricultura	25,000,000 pesos	Otros	80,000,000 pesos

¿Se ajustó este gobierno a los gastos presupuestados originalmente? _____

¿En qué renglones el gasto no se ajustó al presupuesto original?

¿En qué renglón el gasto real se apartó más sobre lo presupuestado?

¿Está completo el reporte de gastos? —¿Por qué?

Circunferencia

Consigue una rueda (bastidor de costura, aro, etc.), un cordón o hilo y una regla.

Mide la circunferencia (rededor) de tu rueda con el cordón, ahora mide con una regla el largo marcado en el cordón y anotalo en la columna correspondiente de la tabla de abajo.

Con el mismo cordón o directamente con la regla, mide, lo mas exactamente posible, el diametro de tu rueda. Anota el resultado en la segunda columna.

Para saber cuantas veces es más larga la circunferencia que el diámetro, divide el largo de la circunferencia entre el diámetro de la misma, aproximando hasta centécimos y anota el resultado en la última columna.

	Longitud de la circunferencia	Longitud del diametro	Circunferencia entre diametro
1a. Rueda			
2a. Rueda			
3a. Rueda			

Consigue entre tus compañeros otras dos ruedas de diferente tamaño y, procediendo de la misma manera, completa la tabla anterior

¿Qué observas en los numeros de la tercera columna? _____

Compara los numeros de tu tercera columna, donde se relaciona la longitud de la circunferencia con la del diámetro, con los numeros que obtuvieron tus compañeros, a partir de otras ruedas.

¿Qué observas? ¿Hay cierta regularidad en estos numeros?_____

¿Cual? _____

¿Crees que se puede concluir que el numero de veces que el diámetro cabe en la circunferencia es siempre el mismo, sin importar el tamaño de la rueda?

Si crees que sí, ¿cual seria ese número de acuerdo a los datos obtenidos en el salón?_____

¿Por qué crees que no coinciden todos los números?

_____

Efectivamente, se ha comprobado que el número de veces que el diámetro cabe en la circunferencia es el mismo para cualquier circunferencia Algunos matemáticos lo han calculado y dicen que debe ser, **aproximadamente.**

3. 141592

¿El numero que ustedes obtuvieron en clase, se parece a este?

Como este número se usa mucho, la gente le ha dado un nombre y un simbolo. El simbolo es una letra griega π que se llama pi.

Esto es.

$$\pi = 3.141592$$

Por lo visto antes sabemos lo siguiente

longitud de la circunferencia = $\pi \times$ longitud del diametro

Que brevemente escribimos:

$$c = \pi \times d$$

c = longitud de la circunferencia

d = diámetro de la circunferencia

$\pi = 3.141592$

Para la mayoría de los problemas cotidianos no es necesario usar todas las cifras decimales de π y se usan solo dos. Esto es, para nuestros cálculos usaremos

$$\pi = 3.14$$

¿Para qué nos sirve saber todo esto?

Su utilidad es que nos permite relacionar circunferencia con diámetro. Si conocemos uno de ellos, podemos determinar el otro.

Por ejemplo, un señor quiere construir una carreta, de tal manera que por una vuelta de la rueda la carreta avance 3 m, ¿de qué diámetro debe construir sus ruedas?

Vamos a resolver este problema. Si por una vuelta de rueda la carreta debe avanzar 3 m, esto quiere decir que la circunferencia de la rueda debe ser de 3 m. Aplica ahora tu relación y obtienes

$$3 = \pi \times d$$

o bien:

$$d = 3 \div \pi = \frac{3}{\pi} = \frac{3}{3.14} = \underline{\quad}$$

y de esta manera se calcula el diámetro.

¿Por qué era conveniente calcular el diámetro si ya conocíamos la circunferencia? Trata de construir una rueda conociendo su circunferencia, pero no su diámetro.

Resuelve tú estos problemas.

Un señor quiere cambiar un tramo de una tubería averiada. Para comprarla necesita conocer el diámetro. Usando un cordón encuentra que la circunferencia es 4.75 pulgadas. ¿De qué diámetro debe pedir el tubo en la ferretería? _____

Octavio fue comisionado para hacer los aros de los tableros de una cancha de basquet. Se le dijo que el radio del aro debe ser 22.5 cm, ¿cuánta longitud de alambrón utilizará en los dos aros? _____

Si la cuarta parte de un meridiano de la Tierra mide aproximadamente 10,000 km ¿Aproximadamente cuánto mide el diámetro de nuestro planeta?

¿Qué es el precio de una cosa?

El papá de Felipe se compro un traje A Felipe le gustó mucho y le pregunto a su papa cuanto habia pagado por el.

—Me costo 800 pesos —dijo el papá.

—Újule —exclamó Felipe— han de ganar mucho los que hacen trajes, ¿cuanto crees que ganen, papá?

—La verdad, no tengo idea, pero puedes informarte en la tienda donde lo compré.

Felipe fue a la tienda donde su papá había comprado el traje. Allí no le pudieron informar nada, solo le dijeron a qué fábrica se los compraban. Como la fabrica no quedaba lejos de la casa de Felipe, decidió ir a ella para preguntar.

Era una fabrica pequeña donde trabajan 50 obreros y 5 personas en la administracion En la administración le dijeron que el calculo del costo de producción era una cosa muy complicada en la que intervenían el costo de los materiales, la amortización y mantenimiento de la maquinaria y los salarios de los obreros y administradores. En concreto solo le dijeron que ellos vendían cada traje en 400 pesos a las tiendas.

—Carray —penso Felipe— se me hace que el que gana no es quien los hace, sino quien los vende.

¿Cuanto gana la tienda por traje? —De esto habría que descontar los gastos de la tienda, alquiler y empleados, que Felipe no pudo obtener.

En ese momento era la hora de salida a comer en la fábrica Felipe se dirigio a un grupo de obreros con la esperanza de obtener más información.

—Oigan señores —dijo Felipe— ¿me podrían ustedes decir cuánto cuesta hacer un traje, de los que hacen aquí?

—¿Por qué te interesa eso? —inquirio uno de e los

Nomas por curioso —respondio Felipe.

—Bueno, o lo mejor te llevas una sorpresa, pero si tienes un lapiz y un pape podemos darte los datos —dijo otro de los obreros—. Mira, lo que interviene es el material, el gasto de la maquinaria y los salarios, anota los datos que voy a darte.

Felipe anoto los s'gurentes datos que le proporcionó el obrero.

La fabrica produce 50 trajes diarios El material por traje (tela, botones, etc.) tiene un costo de 120 pesos El gasto diario en maquinaria es de 500 pesos El salario diario de un obrero es de 60 pesos y los sueldos diarios totales en administracion son 500 pesos.

—Muchas gracias dijo Felipe, despidiendose del grupo de obreros

Ya en su casa, Felipe se puso a hacer cuentas Como la fabrica produce 50 trajes al dia y en ella trabajan 50 obreros, Felipe simplifico las las cosas, pensando que un obrero fabrica un traje al dia.

Cuentas de Felipe:

Material de un traje	$ 120
Salario de un obrero	$ 60
	$ 180

Entonces $ 180 es el costo en material y mano de obra de un traje. Pero faltaban otros gastos, estos eran 500 pesos en maquinaria y 500 pesos en administracion. En total son 1,000 pesos, que divididos en 50 trajes dan 20 pesos por traje Entonces el costo total del traje es

$ 180 + $ 20 = $ 200.

—Papá, papá —grito Felipe a terminar sus cuentas— ya conozco la historia del precio de tu traje.

Fabricarlo cuesta 200 pesos La fabrica lo vende en 400 pesos, le gana_____

La tienda lo vende en 800 pesos, le gana_____ El obrero que lo hace gana 60 pesos.

Investiga tú la historia del precio de algún producto que se consume en tu casa o que se fabrica cerca de donde vives.

Estadística y probabilidad

En la unidad Azar y Probabilidad (página 35) Paulina sacaba listones de una caja, pero sabíamos de antemano cuantos listones había de cada color y con ello podíamos calcular la probabilidad de sacar un color particular. El total de listones era 60. Por ejemplo, como 12 eran azules, la probabilidad de sacar uno azul era de $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

Supongamos que ahora Paulina tiene un problema diferente. Ella sabe que en la caja hay 60 listones, pero no sabe cuantos hay de cada color. Le piden que averigüe cuantos hay de cada color, pero sin abrir la caja y contarlos. Lo único que le permiten es meter la mano una vez y sacar un puñado de listones. ¿Crees que ella pueda tener con esto alguna idea del numero de listones que hay de cada color?

Como los listones estaban bien revueltos, Paulina piensa que si saca un puñado, la proporcion de colores en el puñado debe parecerse mucho a la proporcion de colores en toda la caja.

Por ejemplo, si Paulina saco 10 listones en el puñado y al contarlos vio que había 5 listones rojos, 2 azules, 1 verde, 1 amarillo y 1 morado,

¿Que proporciones de cada color hay en el puñado?

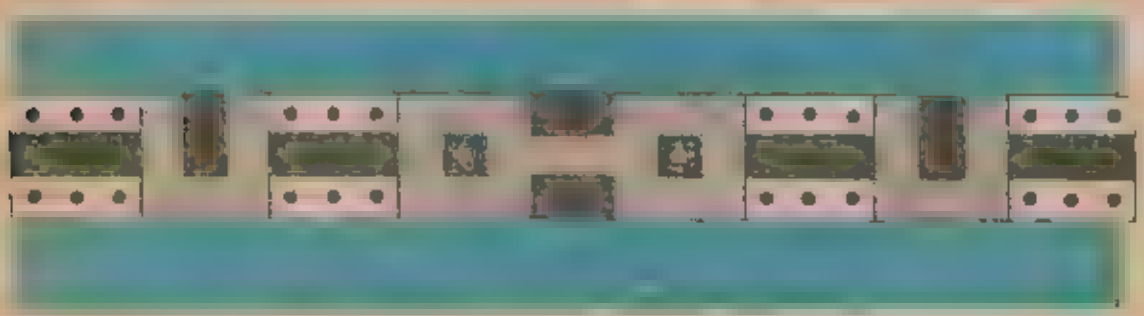
Saco 5 rojos y el puñado eran 10, entonces la proporción de rojos es $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

¿Cual es la proporción de azules?_____

¿Cuál es la proporcion de verdes?_____

¿Cual es la proporcion de amarillos?_____

¿Cual es la proporcion de morados?_____



Si en la caja hay en total 60 listones y Paulina piensa que la proporcion en la caja es la misma que en el puñado, ¿cuantos listones rojos pensara Paulina que hay en la caja?

Para resolverlo piensa que si la proporc'on de rojos en el puñado es $\frac{1}{2}$ entonces debe cumplirse que

$$\frac{1}{2} = \frac{\square}{60}$$

Tú ya has resuelto este tipo de problemas

¿Cuanto vale □? □ = listones rojos

De la misma manera calcula los listones de los otros colores

□ =_____listones azules □ = ___listones amarillos

□ =_____listones verdes □ = ___listones morados

Paulina no ha obtenido la respuesta exacta pero sí una idea aproximada.

Realicen en clase un juego semejante al de Paulina Por ejemplo, el maestro puede meter en una caja canicas de dos o tres colores, sin decirles a ustedes cuantas hay de cada color, revolverlas bien y que ustedes calculen las que hay de cada color, conociendo el número total, como lo hizo Paulina con los listones.

Pueden hacer el juego varias veces. Por ejemplo, primero se saca un puñado y se calculan las cantidades en base a ese puñado.

Después se devuelven las canicas, se revuelven bien de nuevo, se saca otro puñado y se hace el cálculo con este puñado.

Repítase este proceso varias veces.

Finalmente cuéntese las canicas que realmente hay en la caja, y compárense con los resultados obtenidos antes.

Fracciones y decimales

Llena los datos que falten en la siguiente tabla

Fraccion comun	Número decimal	Lectura del numero decimal
$\frac{1}{4}$		veinticinco centésimos
	.6	
	.45	
		sesenta y ocho centésimos
	.625	
$\frac{11}{16}$		
		ochenta y seis centésimos
$\frac{3}{2}$		
		setecientos ochenta y ocho milésimos
	.975	
$\frac{13}{\blacksquare}$		
	.845	
		cincuenta y cuatro milésimos
$\frac{47}{10}$		
		veinticinco diezmilésimos

Exponentes

El dueño de una tlapalería recibe un pedido de 6 paquetes, cada uno de ellos contiene 6 cajas y en cada caja hay 6 botes de pintura, ¿cuántos botes de pintura recibió en el pedido?_____

Seguramente realizaste esta operación: $6 \times 6 \times 6$.

Cuando se tiene que expresar el producto de varios factores iguales, como en este caso, se usa una forma de escritura breve, en lugar de $6 \times 6 \times 6$, escribimos solamente 6^3, es decir

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

Un camión repartidor tiene dos compartimientos, cada uno de los cuales tiene dos pisos, en cada piso lleva dos cajas y en cada caja hay 2 máquinas de coser ¿Con qué operación obtienes el número de máquinas de coser que lleva el camión?_____

¿Cómo puedes expresarla brevemente?_____

Cada una de las siguientes multiplicaciones se puede escribir en forma breve, hazlo:

$8 \times 8 =$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$

$12 \times 12 \times 12 =$

$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 =$

¿Qué multiplicación representa cada una de estas expresiones?

$10^5 =$

$4^3 =$

$11^7 =$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

Al numerito que se escribe arriba a la derecha se le conoce como **exponente.**_____

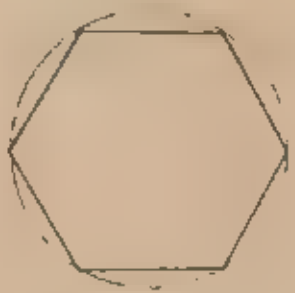
Usando algún exponente, ¿cómo puedes escribir la relación para obtener el área de un cuadrado?_____

¿Y para el volumen de un cubo?_____

Area de polígonos y el área del círculo

Aquí tienes unos polígonos regulares

5 lados
pentágono

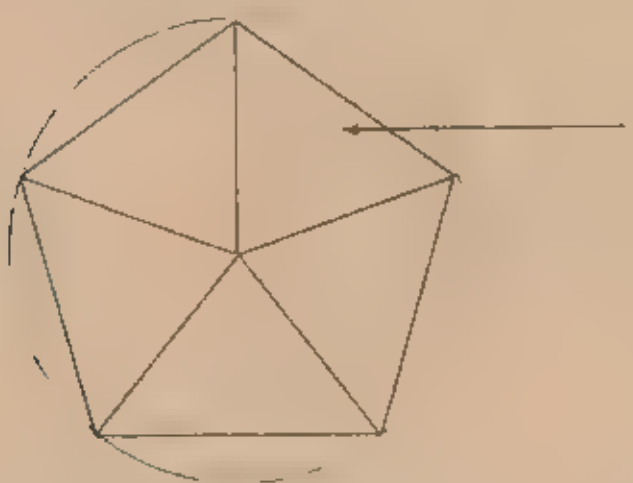


6 lados
hexágono

8 lados
octágono

¿Como calcularías el área de uno de estos polígonos? Puedes hacerlo dividiendo en triangulos, como ya has hecho antes. Vamos a hacerlo con el pentagono, de una forma especial

Divide el pentagono en 5 triángulos iguales, usando el centro del polígono.



Para calcular el área de uno de estos triángulos necesitas conocer su altura, la línea roja en la ilustracion de arriba, esta altura se llama apotema del polígono. Necesitas también la base del triángulo que es uno de los lados del polígono.

Vamos a llamarle a a la apotema.

Vamos a llamarle l al lado.

¿Cuál es el área de uno de los triángulos?

Es: $\frac{l \times a}{2}$

Esto ya lo sab as, el área de un tr'ángulo es $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

¿Cuál es el área total del polígono?

Como el pol'gono consiste de 5 triangulos iguales, cada uno con área $\frac{l \times a}{2}$ el área total del pol'gono es

$$\frac{5 \times l \times a}{2}$$

Esta formula te permite ca cular el área de un pentágono.

Con el m'smo procedimiento anterior, deduce tu las fórmulas para el hexágono y el octágono.

Viendo estas otras fórmulas que has deducido ¿observas algo común entre ellas?

Podrías adiv'nar, sin hacer ningún calculo, cuales serian las formuas para un poligono regular de 10 lados, y para uno de 15 lados, y para uno de 1 000 lados?

Escribe las fórmulas:

En cada formula aparece un producto como $5 \times l$, $6 \times l$, $10 \times l$, $1\,000 \times l$, etc., dependiendo del número de lados del polígono.

¿Puedes interpretar este producto como una longitud? En el caso del pentagono $5 \times l$ es el perímetro del pentagono.

En el caso del hexágono, $6 \times l$ es _____

En el caso del polígono de 1 000 lados, $1\,000 \times l$ es _____

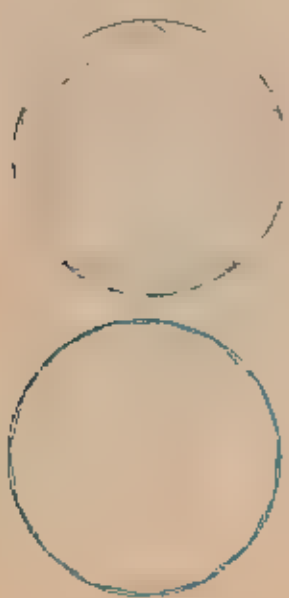
Entonces si llamamos p al perímetro del polígono hay una sola formula para calcular el area de cualquiera de ellos

$$\text{Area} = \frac{p \times a}{2} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Calcula el área de estos polígonos con la formula anterior, mide con tu regla.

Area = Area =

Observa estas ilustrac ones de polígonos inscritos en una circunferencia



¿Qué pasa a medida que aumenta el numero de lados?

¿Qué pasa con la apotema en relacion al radio del circulo?

Si el número de lados fuese muy grande, por ejemplo un millón, haz un dibujo de como verías el polígono.

¿Crees que la fórmula para calcular el area de un pol'gono te sirva para calcular e: área de un círculo?

¿Por qué?

Ya viste como se calcula el perimetro de un c'rculo, su circunferencia·

perímetro del círculo $= \pi \times$ diametro

Diámetro = 2 veces el radio.

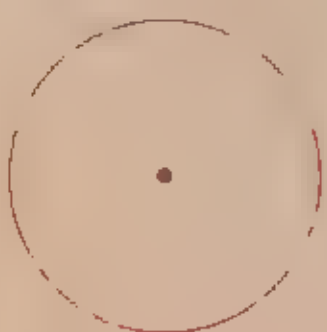
En un círculo **radio = apotema**

Si llamamos r al radio del círculo, entonces:

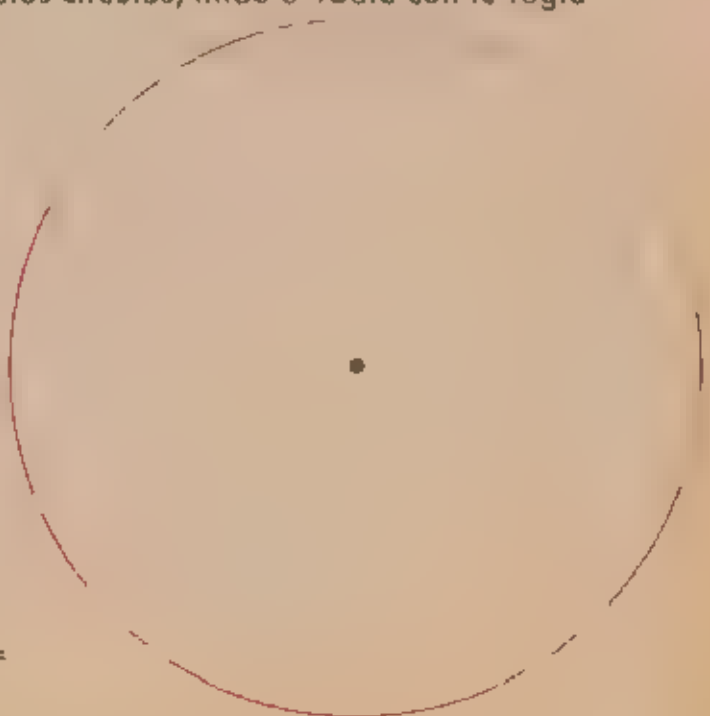
$$\text{Área del círculo} = \frac{p \times a}{2} = \frac{\pi \times 2r \times r}{2} = \pi \times r \times r$$

$$= \pi \times r^2$$

Calcula el área de estos círculos, mide e radio con tu regla



Area =



Area =

Unas cosas dependen de otras

Contesta a las siguientes preguntas.

Cuando la mamá de Simon compra tortillas, ¿el precio que paga depende de los kilos de tortilla que compra? _____

¿Por qué? _____

¿El precio que paga depende de la edad del tortillero? _____

¿Por qué? _____

¿El grueso de un libro depende del tamaño de sus paginas? _____

¿Por qué? _____

La cantidad de gasolina que consume un automovil en la carretera ¿depende de la distancia que recorre? _____

¿Por qué? _____

La temperatura del agua, ¿depende del color de los ojos del dueño del termómetro? _____ ¿Por qué? _____

En algunos casos una cosa depende de otra. Una cantidad está en función de otra.

El kilo de tortilla vale $ 2.20.

Si la mamá de Simón compra 3 kilos paga $ 6 60.

Si compra 4 kilos paga $ _____

Si compra 6 kilos paga $ _____

Si compra_____kilos paga $ 4.40

Si compra k'los paga $ 22.00

Si compra 7 kilos paga$ _____

Éstos datos pueden resumirse así:

Kilos de Tortilla	Precio en $
[illegible]	6.60
4	
[illegible]	
	4.40
	22.00
7	

Pónlos en una tabla ordenada así, y completa.

Kilos	
[illegible]	2 20
2	
[illegible]	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

A una variación de 1 kilo de tortilla le corresponde una variación de $ 2.20 en el precio. El precio de las tortillas esta en función del peso de las tortillas

Si el metro de tubo vale $ 6 00, haz una tab a como la anterior para prec os de 1 metro hasta 15 metros, metro por metro.

Reparto proporcional

Hilario y Rogelio compraron un billete de la Lotería Nacional. Hilario cooperó con $ 6.00 y Rogelio con $ 9.00.

Hilario y Rogelio tienen mucha suerte ya que sacaron un premio de $ 1,500. Sacarse un premio es un experimento de azar con una probabilidad muy pequeña.

¿Cuánto les costó el billete de lotería? _____

¿Qué fracción del costo pagó Hilario? _____

¿Qué fracción del costo pagó Rogelio? _____

Piensan repartirse el premio **proporcionalmente** a lo que aportaron.

¿En cuántas partes deben dividir el premio para que se lo puedan repartir? _____

¿De cuanto es cada una de estas partes? _____

¿Cuántas de estas partes le tocan a Hilario? _____

¿Cuántas de estas partes le tocan a Rogelio? _____

¿Cuánto le toca a Hilario? $ _____

¿Cuánto le toca a Rogelio? $ _____

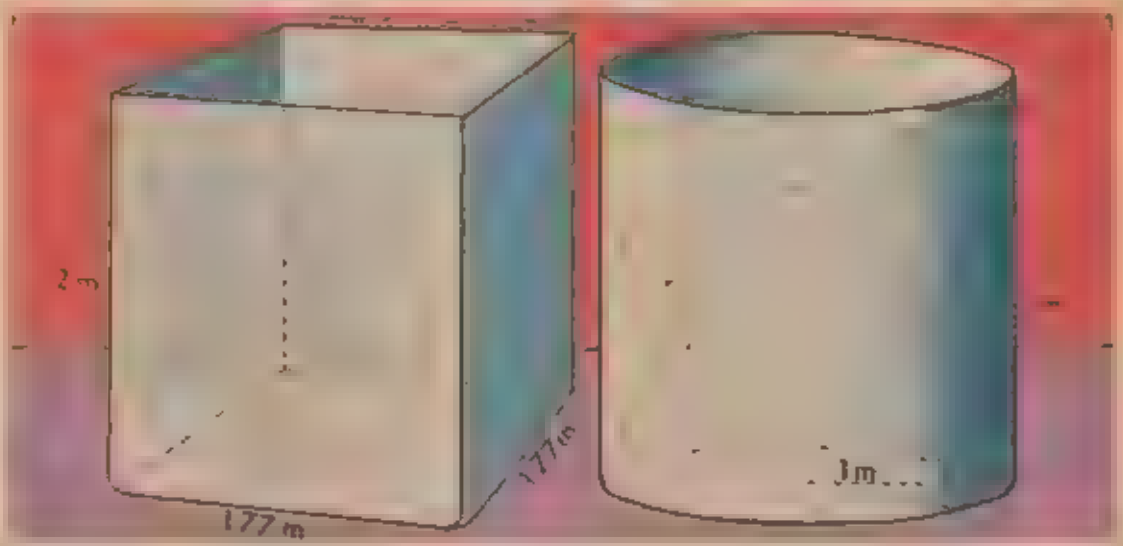
Marcos y Lucio hicieron un trabajo por el que cobraron $ 280.00. Marcos trabajó 8 horas y Lucio 6 horas. ¿Cuánto le toca a cada uno, si se reparten el dinero proporcionalmente a las horas trabajadas?

Un albañil hace una mezcla formada por 2 botes de cal y 5 de arena. Si necesita 18 botes de mezcla, ¿cuanto debe poner de cal y cuánto de arena?

Para colocar un soporte en la pared, Miguel quiere que por cada 5 cm que queden fuera haya 1 cm incrustrado en la pared. Si el soporte mide en total 42 cm, ¿cuántos cm quedan incrustrados en la pared? _____ ¿Cuantos cm quedan fuera? _____

Prisma y cilindro

Fíjate en estos dos tinacos y en sus medidas



Los dos tienen forma de prisma. Uno es un prisma cuadrangular, su base es un cuadrado. El otro es un prisma circular (cilindro) su base es un círculo.

Calcula el volumen, en m^3, de cada tinaco.

¿Cuántos litros de agua caben en cada tinaco?

Recuerda 1 litro = 1 dm^3

1 m^3 = 1000 dm^3

Considera a cada tinaco sin su tapa. Piensa que cada tinaco está hecho de asbesto del mismo grueso.

¿Podrías saber en cuál tinaco se usó más asbesto en su construcción? Discútelo en clase con tus compañeros y el maestro.

Supone que una lámina de asbesto, del mismo grueso que el utilizado en los tinacos, y en forma de un cuadrado de 1 m de lado pesa 8 kilos.

1 m de asbesto pesa 8 kilos.

¿Cuánto pesa cada uno de los tinacos? _____

¿Cuál tinaco es preferible y por qué? _____

Los números no siempre son exactos

Si lo que tienen varias gentes lo suman y el total lo dividen entre los que son, saben lo que les tocaría a cada uno de ellos Esto se llama tomar el promedio, el resultado que se obtiene se llama **promedio.**

Observa ahora estos tres casos:

Caso 1 Juan tiene 4 paletas, Luis tiene 4 paletas y Eugenio tiene 4 paletas En total tienen 12 paletas. Como son tres personas, dividimos 12 entre 3 lo que nos da como resultado 4. A cada uno le tocan 4 paletas. El **promedio** son 4 paletas por persona El **promedio** es 4

Caso 2. Juan tiene 8 paletas, Luis tiene 4 paletas y Eugenio no tiene paleta En total tienen 12 paletas Como son tres personas, dividimos 12 entre 3 que nos da 4. El promedio son 4 paletas por persona. El **promedio es 4.**

Caso 3 Juan tiene 12 paletas, Luis no tiene paletas y Eugenio tampoco tiene paletas. En total tienen 12 paletas Como son tres personas, dividimos 12 entre 3 que nos da 4. El promedio son 4 paletas por persona. El **promedio es 4.**

En cada caso el promedio es el mismo, a cada uno le estamos asignando el mismo número promedio 4, pero. ¿son iguales los casos?, ¿nos sirve el promedio para distinguir estos casos?

Como puedes observar el **promedio** no siempre refleja bien una situacion. Sin embargo, el **promedio** se usa mucho en la información estadística.

Por ejemplo, se dice que el ingreso promedio del mexicano es de $ 690 00 al mes. ¿Crees que este promedio es un buen indice de la si-

tuacion real? Puedes hacer una encuesta en tu salon, en tu escuela, o en tu barr o y comparar tus resultados con el dato promedio dado.

Supongamos que en una fabrica trabajan 20 personas, 19 de ellas son obreros y cada una gana $ 1,500 al mes, la otra es el gerente que también recibe un sue do mensual. La nomina mensual total es de $ 48,500.

Como son un total de 20 personas el promedio de sueldo es de

_____

¿Es este promedio un buen índice de la realidad? _____

_____

_____

¿Cuánto gana el gerente? _____

En casos como el de la fabrica el promedio no es un dato adecuado.

Un dato mas real seria hablar del sueldo **más frecuente**, que en este caso es _____

Anota la estatura de cada uno de tus compañeros de salón.

Calcula la estatura promedio en tu salon Compárala con la estatura **más frecuente.**

¿Qué dato será más adecuado para describir la realidad en cada uno de los casos siguientes, el promedio o el dato más frecuente?.

a) Numero de años de escolaridad entre adultos en un país

b) Número de habitaciones por vivienda en un barrio _____

c) Ingreso mensual por familia en un pueblo _____

d) Número de hijos por familia _____

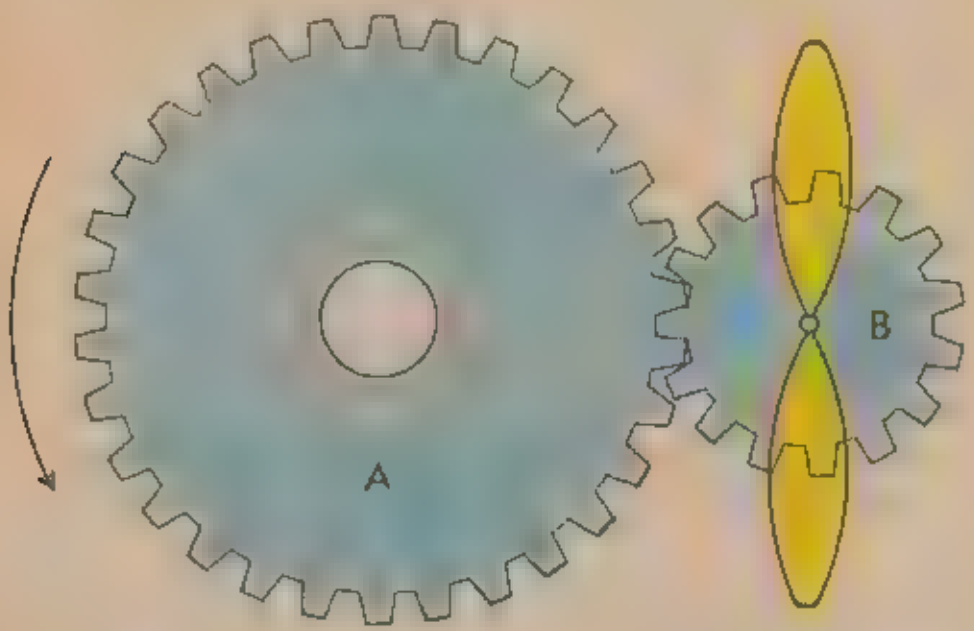
e) Kilos de carne que consume cada habitante al año en México

_____

Engranes

¿Conoces un engrane?

Aquí se muestran dos de ellos



Si el engrane A gira en el sentido que indica la flecha (contrario al que giran las manecillas de un reloj), ¿en qué sentido gira el engrane B? _____

Si la helice está unida al engrane B por un eje fijo

¿En qué sentido gira la hélice? _____

¿Cuántos dientes tiene el engrane A? _____

¿Cuantos dientes tiene el engrane B? _____

Si el engrane A da una vuelta completa, ¿cuántas vueltas da el engrane B? _____

Si el engrane A da 4 vueltas, ¿cuántas vueltas da la hélice? _____

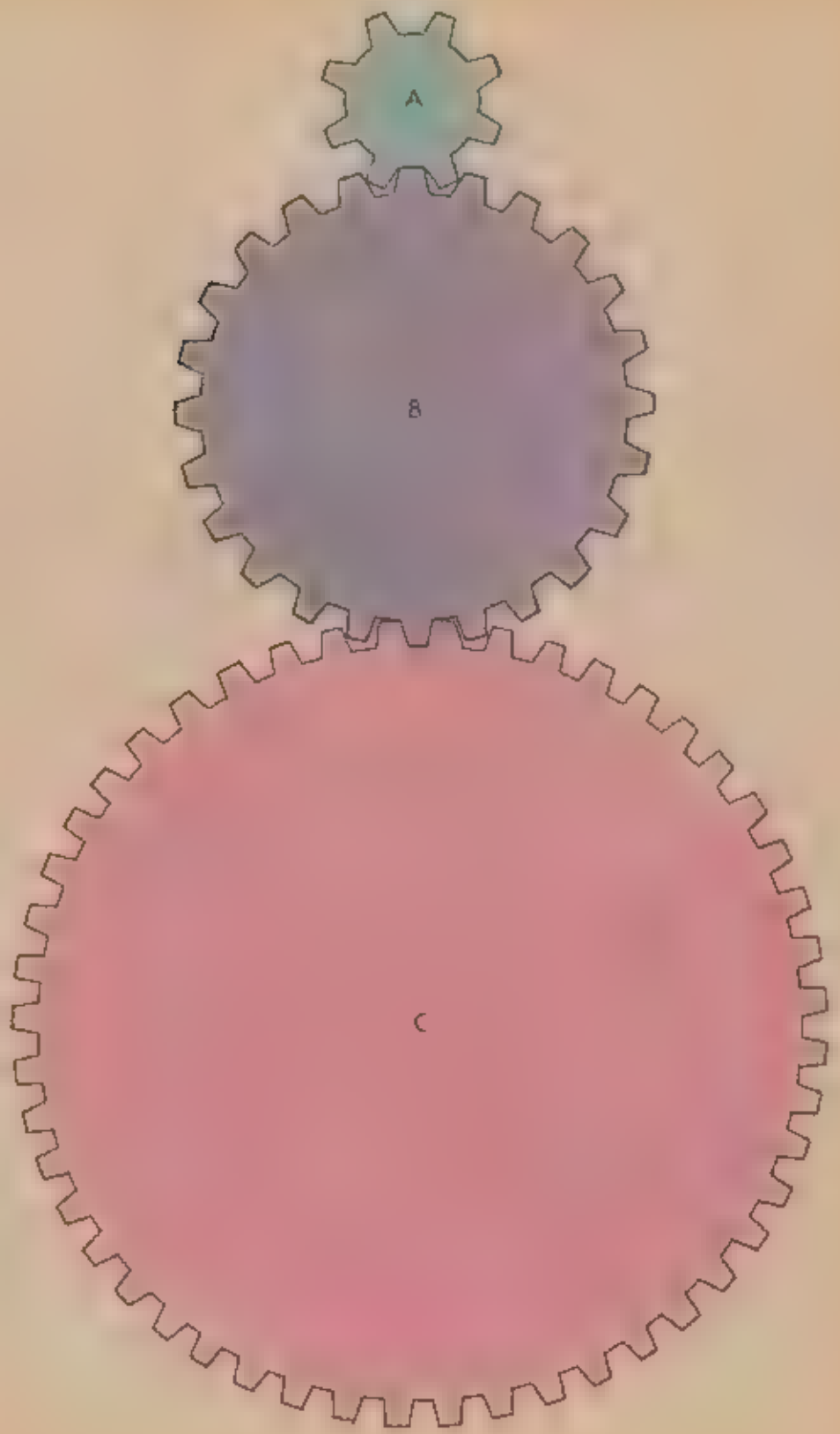
Si el A da 10 vueltas cada minuto, ¿cuantas vueltas da la hélice en 5 minutos? _____

Si necesitamos que la hélice dé 60 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas debe dar el engrane A? _____

¿Cómo es el engrane A con respecto al B? _____

¿Cuál gira mas rápidamente? _____

Observa estos engranes y contesta las preguntas que se hacen en la página siguiente



Si el engrane A gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, ¿en qué sentido gira el engrane C?_____

Para que C gire una vuelta, ¿cuántas necesita girar B?_____

Si B gira una vuelta, ¿cuántas ha girado A?_____

Para que C gire una vuelta, ¿cuántas necesita dar A?_____

Si A da 18 vueltas por minuto, ¿cuántas da B en un minuto?_____

¿Cuántas da C en un minuto?_____

Mide los diámetros internos de los tres engranes._____

¿Qué observas?_____

Calcula la circunferencia interna de los tres engranes.

¿Qué observas?_____

Lógica

Al hablar utilizamos expresiones en forma afirmativa como: soy alumno de 6o. año; y otras en forma negativa, como: no saldremos a recreo.

Por el uso frecuente que tienen estas expresiones es importante que sepamos hacer la negación de una expresión

Por ejemplo:

Lorenzo es más grande que Sergio.

No se niega diciendo· Lorenzo es más chico que Sergio, porque pueden ser iguales.

La negación correcta es: Lorenzo no es más grande que Sergio

Todos los libros son de Matemáticas.

No se niega diciendo: ningún libro es de Matemáticas, porque algunos sí lo son.

La negacion correcta es: algunos libros no son de Matemáticas.

En cada caso subraya la negación que es correcta:

Cristina sale de su casa	Cristina entra en su casa Cristina no sale de su casa
Gregorio sube una escalera	Gregorio no sube una escalera Gregorio baja una escalera
El cabello de Miguel es más corto que el de Beatriz	El cabello de Miguel no es más corto que el de Beatriz El cabello de Miguel es más largo que el de Beatriz
Todos los coches son azules	Ningún coche es azul No todos los coches son azules
Ningún mexicano es hidalguense	Algunos mexicanos son hidalguenses Todos los mexicanos son hidalguenses

Aurelio no sabe escribir	Aurelio nunca sabe escribir No es cierto que Aurelio no sabe escribir

Ahora haz tú la negación de:

Sandra vende fruta _____

Hay mamíferos en el mar _____

No estoy en el salón de clase _____

Algunas pinturas son rojas _____

Todos los números son menores que 3 _____

Di si cada una de estas proposiciones es falsa o verdadera, en el lado derecho haz la negacion y tambien marca si es falsa o verdadera.

Proposicion	F o V	Negacion	V ó F
Los pájaros vuelan			
La ballena es un mamífero			
El sonido viaja más rápido que la luz			
Los múltiplos de 4 no son pares			
$2 < 5$			
El km es una medida de longitud			
El Sol no es un planeta			
El perímetro de una figura es la suma de sus lados			
Todos los mexicanos son presidentes			

Observa que:

Cuando una proposición es **verdadera** su **negación** es **falsa** y cuando una proposicion es **falsa**, su **negación** es **verdadera.**

Modelos

Un lechero tiene sólo 2 recipientes, uno de 5 litros y otro de 3 litros. Plantea a algunos compañeros suyos el siguiente problema· ¿Como despachar exactamente 7 litros con esos recipientes?

Uno de ellos, Rodrigo, consiguió los recipientes de esa capacidad, trajo dos botes de leche, uno lleno y uno vacío y se puso a hacer ensayos.

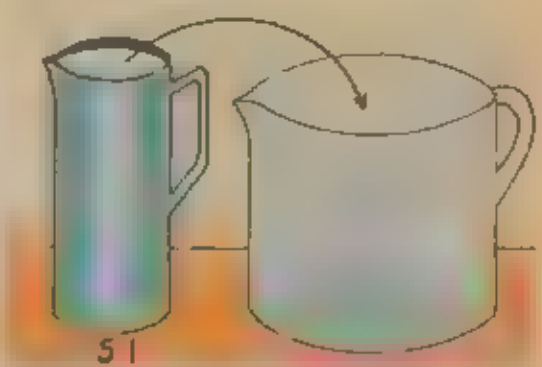
Primero sirvió el de 5, falta —pensó— si sirvo otro de 5 se pasa mucho, pondré uno de 3. Ahora tengo 8 litros, si quito alguno de las medidas, me regreso, pondré otra de 3, tengo 11 litros".

Sirvio nuevamente 3 litros, ahora tiene 14, quitó 5 litros y ahora tiene 9, sirve otros 3 y tiene 12 "Si ahora quito 5 litros penso— tengo los 7 que quería Lo he conseguido —dijo -. Este es el procedimiento".

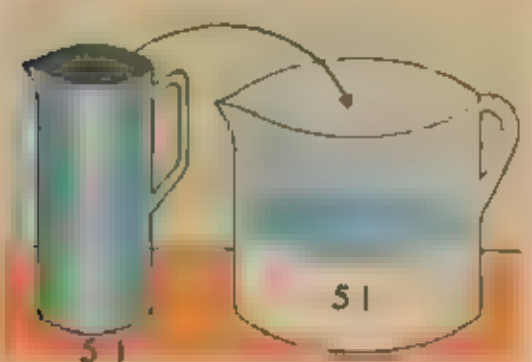
Otro de sus compañeros, Humberto, penso, que no era necesario tener los recipientes reales, ni leche, sino que se podía representar la situación dibujando los botes en la tierra y suponerlos de 3 y de 5 litros como los del lechero.

Su primer dibujo fue

El segundo



El tercero



El cuarto

El quinto **El sexto**

Con lo que obtiene un metodo para despachar 7 litros

Observa que los dos procedimientos nos llevan al resultado, ¿cual de los dos te parece mas practico, el de Rodrigo o el de Humberto?

_____ ¿Por qué? _____

Lo que hizo Humberto, representar de alguna manera los elementos de su problema, es hacer un modelo de la situacion que se quiere resolver.

Seguramente tu puedes resolver este problema, de alguna otra forma, ¿cómo? _____

Tú ya has trabajado con modelos de algunas situaciones, por ejemplo en la pagina 17, se te presentó un dibujo a escala de un terreno, es decir, un modelo de dicho terreno para que calcularas su area

Utilizando el modelo que te parezca más conveniente describe el procedimiento que puede seguir el lechero del problema anterior para despachar 4 litros.

Y el procedimiento para despachar un litro sera

Un campesino tiene 6 caballos que estan adiestrados para tirar de una carreta y 4 para cargar bultos Si en total tiene 8 caballos y todos le sirven al menos para una cosa, ¿cuantos le sirven para las dos cosas (tirar una carreta y para cargar bultos)?

Para resolver este problema ¿necesitas los 8 caballos?_____

Haz un modelo de la situacion, si es necesario dibuja 8 caballos

Marca con una cruz los 6 que sirven para tirar carretas.

Marca con un círculo los 4 que sirven para cargar bultos

¿Cuantos caballos estan marcados con cruz y con círculo? ____

¿Qué significa que esos caballos tengan las dos marcas?_____

La solución al problema es _____

De un grupo de 30 niños que pertenecen a clubes deportivos, hay 21 que juegan futbol y 18 que juegan volibol, ¿cuántos niños practican los dos deportes?

Graciela tiene 10 años, su hermana Berta tiene 4 años menos que Graciela, Leonor tiene 2 años mas que Berta, Adela tiene 1 ano menos que Leonor y Consuelo tiene 6 años mas que Adela ¿Quién de las cinco es mas grande? _____ ¿Quién es más chica? _____

Un señor lleva consigo un perro, una gallina y una olla con maíz Necesita cruzar un río en una canoa, pero en cada viaje solo puede llevar una de estas tres cosas.

No desea que el perro se quede solo con la gallina, se la comería, ni que la gallina se quede sola con el maíz, se lo comería

¿Qué procedimiento debe seguir para pasar a la otra orilla sin perder ni la gallina ni el maíz?

El costo de la vida

Seguramente te habrás enterado, ya sea por el periódico o por la televisión, o por el radio, o por pláticas en tu familia, de que en México ha habido últimamente un aumento considerable en el costo de la vida. Mas precisamente se habla de un aumento en el costo de la vida del 30%. ¿Qué quiere decir esto?

Normalmente este dato se obtiene tomando un promedio de los aumentos de ciertos artículos o servicios que se consideran básicos. Por ejemplo, el aumento de precios en pan, tortillas, frijoles, leche, carne, verduras y frutas, el aumento en gas, electricidad, ropa, etc

Vamos a suponer que te dan estos datos de aumento de precios. En base a ellos calcula el % de aumento del costo de vida

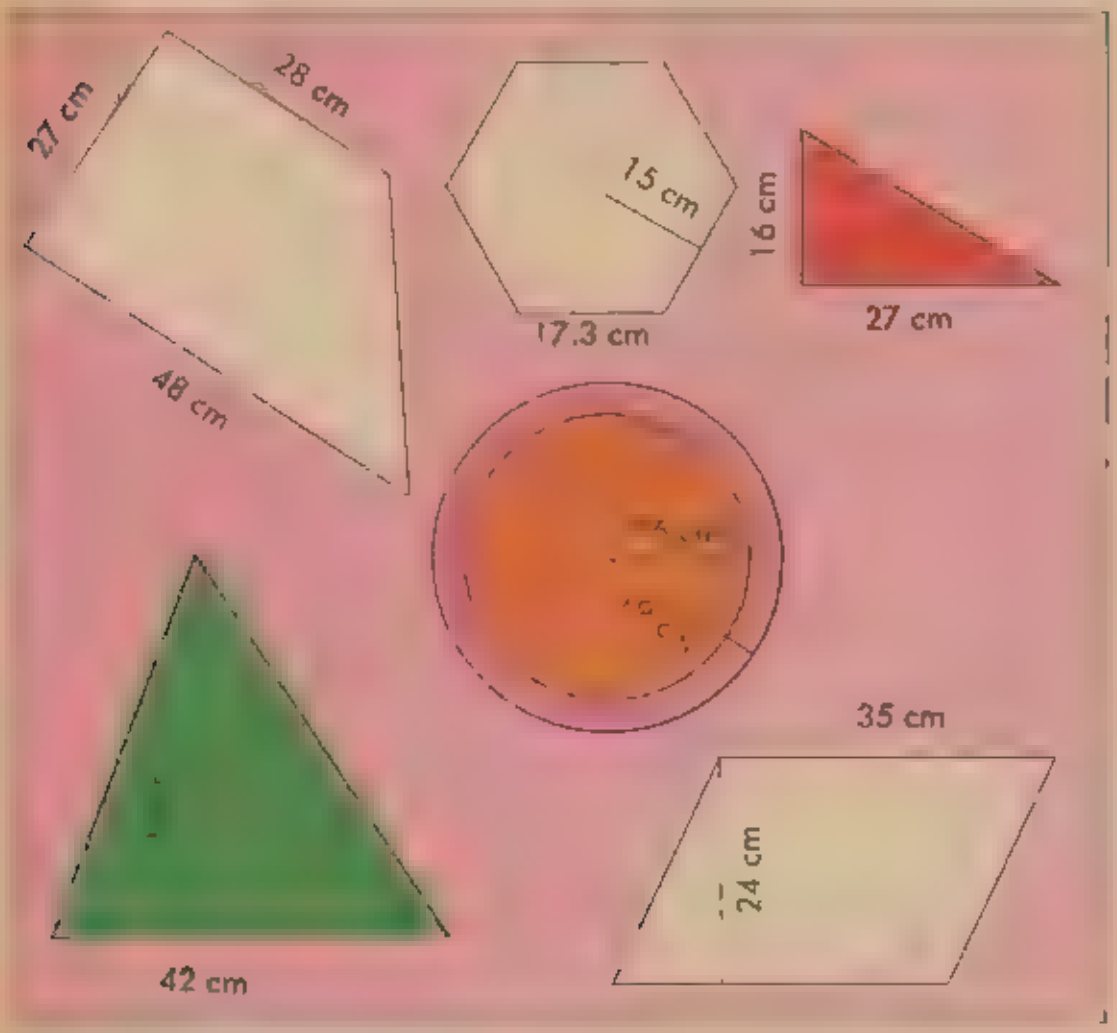
	Precio anterior	Precio actual (Feb. 74)	Aumento en %
Pan	10 ¢ pieza	20 ¢ pieza	100%
Tortilla	$ 1.80 kilo	$ 2.20 kilo	
Frijol	$ 4.50 kilo	$ 6.75 kilo	50%
Leche	$ 2.80 litro	$ 3.60 litro	
Papa	$ 2.00 kilo	$ 5.00 kilo	
Pantalón de mezclilla	$30 00 pieza	$54 00 pieza	
Litro de gas	$ 0 45 litro	$ 1 05 litro	

Este tipo de datos no son iguales en todas partes. Sería conveniente que hicieses una investigación, en donde tu vives, sobre el cambio en precio, de algunos artículos indispensables, entre diciembre de 1973 y la fecha en que tomes los datos. En base a ello calcula el aumento en % del costo de la vida.

Puedes hacer también una investigación del aumento de ingresos, en el mismo periodo, en diversas ocupaciones, por ejemplo, maestro de escuela, albañil, obrero, médico, etc.

Areas

Angel construye en una pared un "tiro al blanco" con figuras como las del dibujo de abajo, para invitar a sus compañeros a jugar. Tirarán a ciegas. A cada figura le va a asignar una puntuación, de modo que ganará el niño que reúna mas puntos en tres tiradas.



A la figura que es menos probable pegarle, le va a dar mayor puntuación.

La probabilidad de pegarle a una figura ¿depende del área de la figura?

¿Es mas probable pegarle a una figura de mayor área o a una de menor área?

¿A mayor área le corresponde mayor o menor puntuación?

Para contestar las siguientes preguntas necesitas primero hallar el área de cada una de las figuras del "tiro al blanco".

Para tener a la vista el area de cada una de las figuras, calcúlalas y llena el siguiente cuadro.

Figura	Area en cm^2
Trapecio	
Hexágono	
Triángulo rojo	
Triángulo verde	
Corona	
Círculo naranja	
Romboide	

Después de encontrar el area de cada una de las figuras contesta lo siguiente:

¿A qué figura es menos probable pegarle y que por lo tanto tendrá mayor puntuación? _____

¿Cuál tendrá menor puntuación? _____

Penso Angel asignarle a las figuras estos valores: 100, 80, 50, 40, 30 y 20 puntos Cuando no le atine a ninguna figura 0 puntos

La figura de 100 puntos es _____

La figura de 80 puntos es _____

La figura de 50 puntos es _____

La figura de 40 puntos es _____

La figura de 20 puntos es _____

Quedan dos figuras que deben tener la misma puntuacion, son

_____ y _____

¿Por qué crees que deben tener la misma puntuacion?_____

_____

¿Qué puntuación les asignó Angel?_____

El domingo fueron a jugar: Gerardo, Teresa y Froylán, Angel anotaba los resultados en una tabla. Complétala sabiendo a qué figuras le atinó cada uno

Jugador	1er. tiro puntos	2o. tiro puntos	3er. tiro puntos	total puntos
Gerardo	círculo	rombo	trapecio	
Teresa	hexágono	[illegible]	triángulo verde	
Froylan	[illegible]	triángulo rojo	corona	
Angel	pentágono	hexágono	hexágono	

¿Quién ganó este juego? _____

¿En qué lugar quedó Teresa? _____

¿Cuál es la maxima puntuación que puedes alcanzar en tres tiradas?

_____

¿Y la mínima? _____

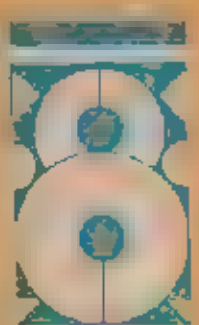
En un segundo juego, Gerardo reunio 220 puntos, ¿a qué figuras crees que les pego? _____, _____ y _____.

Ángel ahora reunió 100 puntos, ¿a qué figuras crees que les pegó?

_____, _____ y _____.

¿Solo de esta manera se pueden reunir 100 puntos?_____

Da otras combinaciones con las que también se reunen 100 puntos



Implicación

Cada una de las oraciones del lado derecho se cumple sólo cuando se cumple una de las del lado izquierdo, búscala y relaciónalas como en el ejemplo

Si hay luz	Respira
Si tiene esqueleto	Es omnívoro
Siempre que es un ser vivo	Hay calor
Si llueve	Vemos los objetos
Siempre que se escucha un sonido	Hay nubes en el cielo
Si come carne y vegetales	Es vertebrado
Siempre que hay fuego	Hay un cuerpo vibrando

Relaciona las proposiciones colocando el numero del lado izquierdo en el paréntesis que le corresponda del lado derecho

1. Si su área es $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$	( ) es mayor que 6
2. Si es múltiplo de 7	( ) tiene tantos lados como ejes de simetría
3. Siempre que la resta de dos números da cero	( ) es un triángulo
4. Si es un prisma	( ) esos números son iguales
5. Si $a = \frac{9}{2}$	( ) entonces $a = 4.5$
6. Siempre que un número es menor que 2	( ) su volumen se encuentra multiplicando el área de la base por la altura
7. Siempre que es polígono regular	( ) entonces $a = 20 : 5$
8. Si $a \times 5 = 20$	( ) es menor que 3

Un problema de construcción

La cooperativa 'Cafetalera del Sur' mandó poner un techo para ampliar sus oficinas.

Ese techo es una losa de concreto de 8 cm de espesor, 5 m de ancho y 12 m de largo. ¿Sabes cuánto dinero se necesita para construir esa losa?

Vamos a hacer los cálculos necesarios para encontrar su costo.

Necesitamos conocer el volumen de concreto que se va a ocupar.

Volumen de la losa _____ m^3.

Del volumen de concreto de esta losa. $\frac{1}{6}$ es cemento, $\frac{1}{3}$ es arena y $\frac{1}{2}$ es grava.

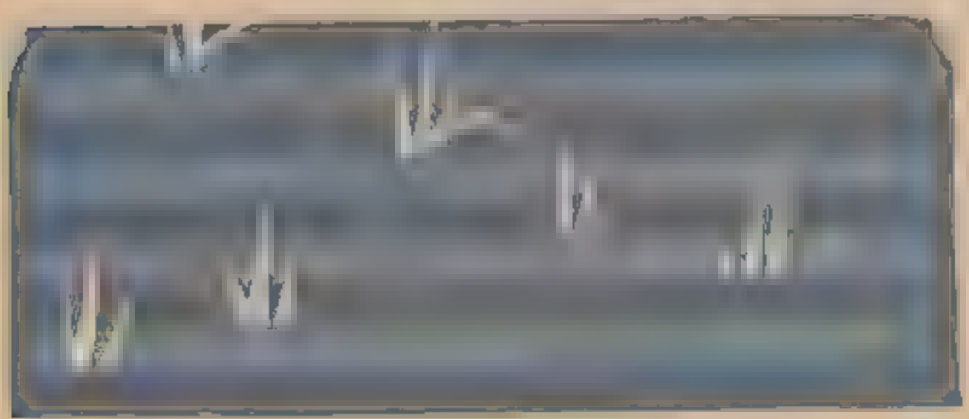
¿Cuántos metros cúbicos de cada uno de estos materiales se necesitan?

cemento _____ m

arena _____ m^3

grava _____ m^3

Sabiendo que un metro cúbico de cemento son 32 bultos de 50 kg, ¿cuántos bultos de cemento se necesitan?



¿Cuanto se gasta en cemento, a razon de 30 pesos el bulto?

La arena y la grava se venden al mismo precio, aproximadamente a razon de $ 60.00 el m , ¿cuanto se gasta en arena y grava? _____

_____

El concreto lleva una armazon formada de varillas, alambron y alambres cuyo costo es de alrededor del 25% del costo del cemento.

Costo aproximado de la armazón de fierro $_____

En resumen, el costo total del material para la losa de concreto fue $_____

Recordando que el volumen de esa losa es_____, encuentra el costo aproximado de cada metro cúbico de concreto $_____

Habras notado que a. hacer un presupuesto para una construccion, el calculo de los costos, siempre es aproximado, ¿tienes idea de por qué es así?_____

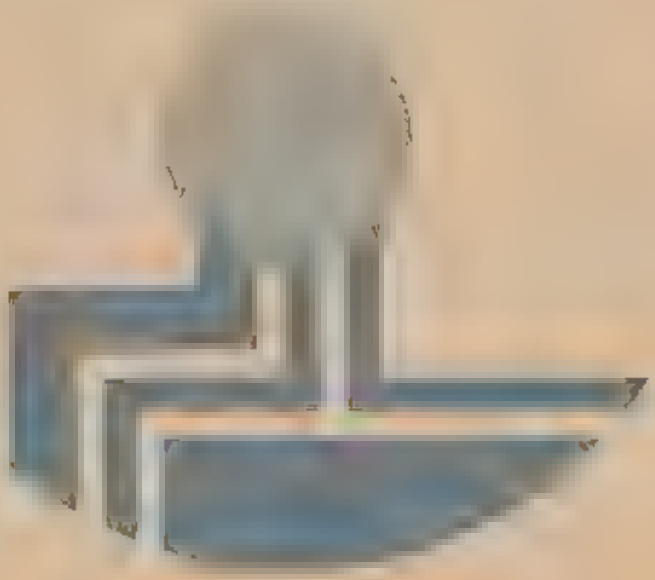
Veamos algunas causas que pueden hacer variar nuestros presupuestos:

1. Variaciones en los precios
2. Desperdicio de materiales
3. Gastos menores (madera, clavos, etc.)

menciona algunas otras

_____

_____



Unidades de tiempo

¿Alguna vez has pensado cuántos días hace que naciste?

Para comprobarlo, subraya la respuesta que creas que se acerca más a la correcta:

Yo tengo. como 10,000 días, como 5,000 días, más de 10,000 días, otra respuesta._____

Ahora expresa tu edad actual, en años, meses y días, conviértela a d as y comprueba qué tan cerca estuviste

Haz la misma pregunta a a gunos de tus am'gos y familiares, generalmente uno cree tener un número mucho más grande de d'as de los que realmente tiene.

¿Conoces a alguien que tenga 50,000 días de nacido?_____

Una fabrica de focos, produce lámparas que están garantizadas para durar mil horas. Una de estas lamparas se instalo el 4 de diciembre, en un aparato que requiere del calor de la lámpara durante todo el día y toda la noche.

La lámpara se fund'o el 8 de enero en la mañana, ¿duro mas o menos del tiempo prometido?_____

Los periodicos del 23 de octubre de 1968 informaron que la nave Apolo 7 había realizado un vuelo de 163 órbitas alrededor de la Tierra, empleando en ello un tiempo de 260 h, 4 min. y 30 seg.

¿Cuántos días estuvieron en órbita los tripulantes de esa nave?

Una persona que ha sufrido un accidente de trabajo recibe una "licencia médica", para no presentarse a trabajar durante 90 días, contados a partir de la fecha de expedición de la licencia, que es 19 de septiembre.

¿Qué dia debe reanudar sus labores esa persona?

Un autobús sale de México rumbo a Coatzacoalcos, Ver. a las 11 horas 20 min. Llegó a Córdoba después de viajar durante 5 hs 36 min. donde permaneció $\frac{1}{2}$ hora.

De allí al puerto de Veracruz tardó 2 hs. 17 min. y allí hizo un descanso de 15 min.

Y finalmente de allí a Coatzacoalcos hizo un tiempo de 4 hs. 52 min

Un pasajero que viajaba en el camión desde Mexico, ¿a qué hora llegó al puerto de Veracruz? _____

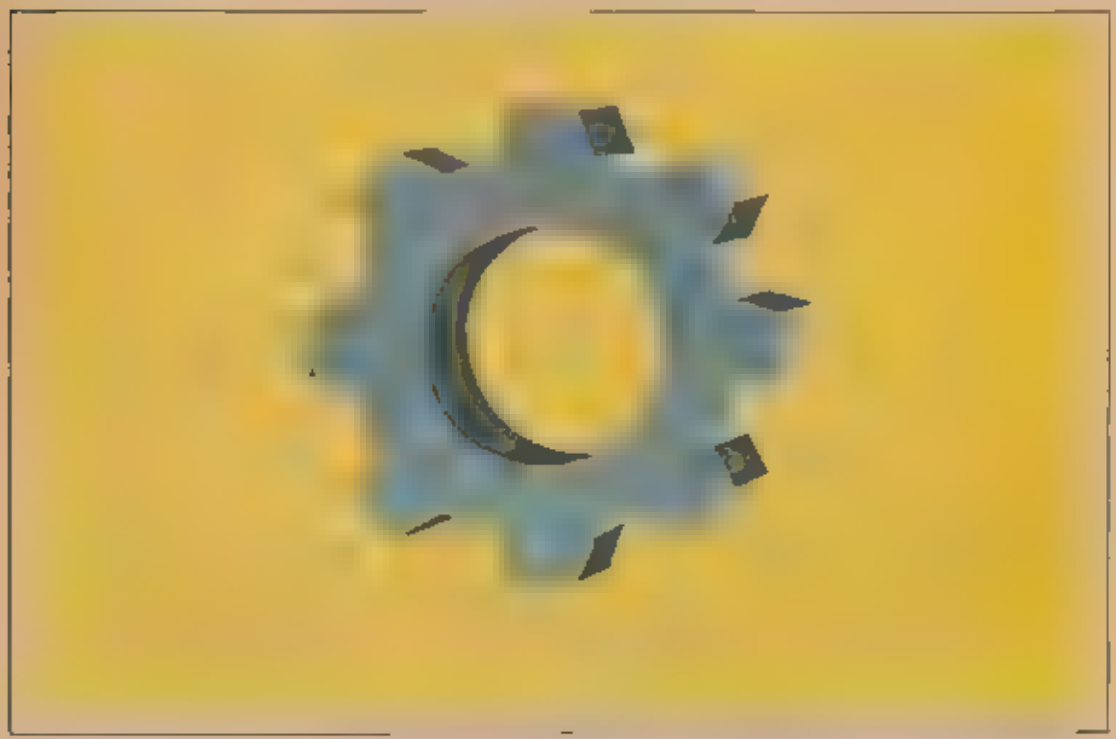
Otro pasajero tiene que estar en Coatzacoalcos a la media noche. ¿Llegó puntual? _____

¿A que hora sale el autobús de Cordoba? _____

¿Qué tiempo hará en el viaje un pasajero que va de Cordoba a Coatzacoalcos? _____

Un telar automatico hace 1 metro de cierta tela en 1 minuto y 10 segundos Sin dejar de funcionar ese telar, ¿en cuanto tiempo hará 48 m. de esa tela? _____

Volúmenes



Hasta ahora has aprendido a calcular el volumen de algunos cuerpos, ¿el procedimiento que conoces te sirve para obtener el volumen del cuerpo de la ilustración?_____

¿Conoces algún procedimiento para calcular el volumen de un cuerpo como ése?_____

En caso de que no lo conozcas, comenta con tus compañeros y maestro acerca de cuál será el procedimiento más efectivo. También puedes consultar la investigación número 3 del capítulo 7 de tu libro de Ciencias Naturales de 5o. año.

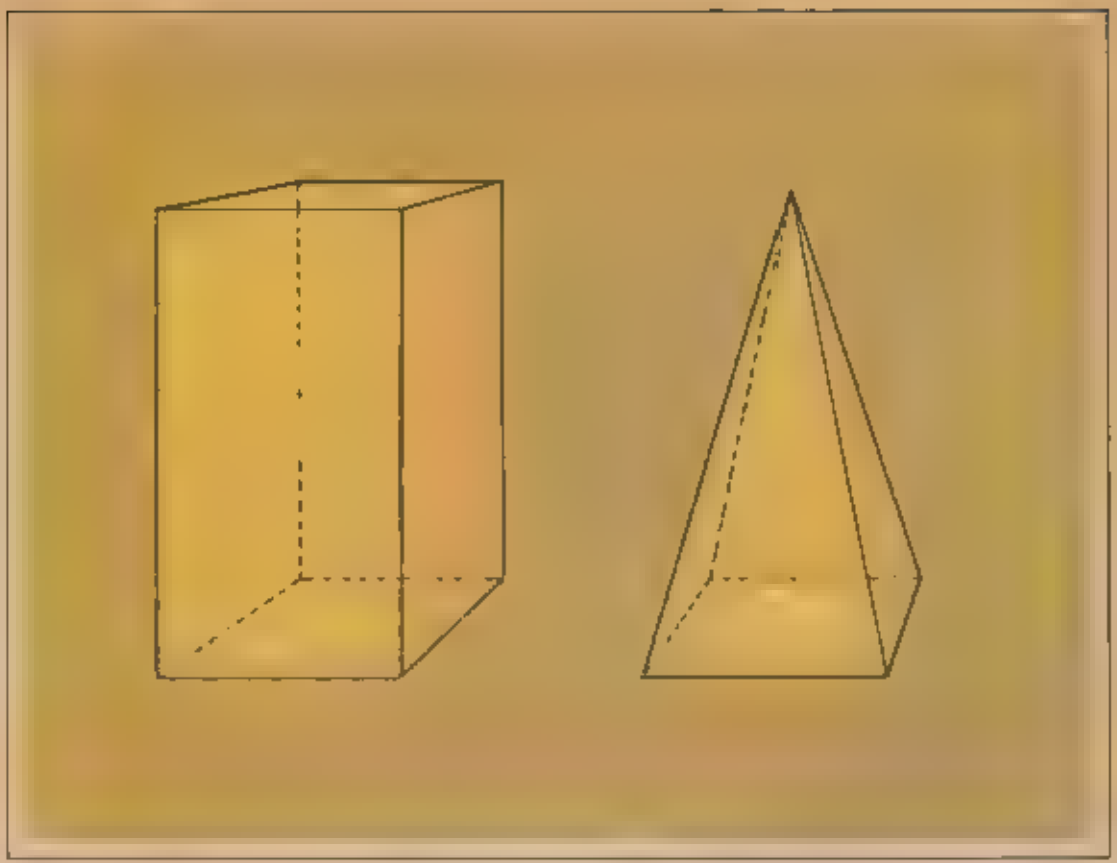
El procedimiento encontrado, ¿sirve en el caso de que el cuerpo cuyo volumen queremos determinar absorba agua?_____

¿Por qué?_____

¿Sirve en el caso de que el cuerpo se disuelva en el agua?____

¿Por qué?_____

Reúne varios objetos a los que se les pueda encontrar el volumen por este procedimiento y clasifícalos en orden de mayor a menor volumen.



Ya sabes la relac on para calcular el volumen de un prisma. Escríbela aquí:

Volumen del prisma = _____

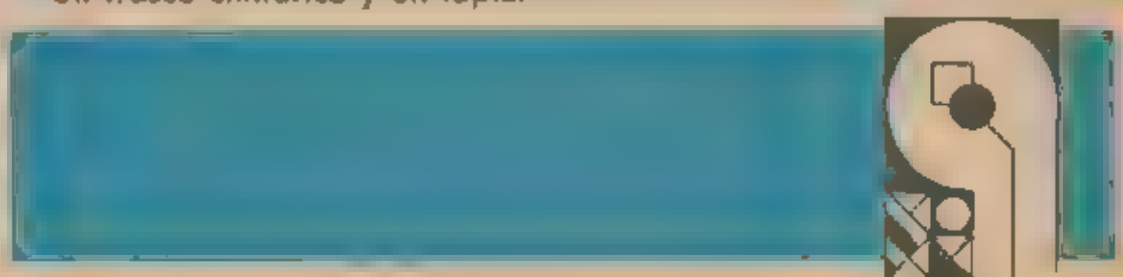
Y para encontrar el volumen de una pirámide, ¿conoces alguna relación? _____

Con el objeto de que conozcas una relación con la cual se pueda obtener el volumen de una piramide, vamos a realizar un experimento.

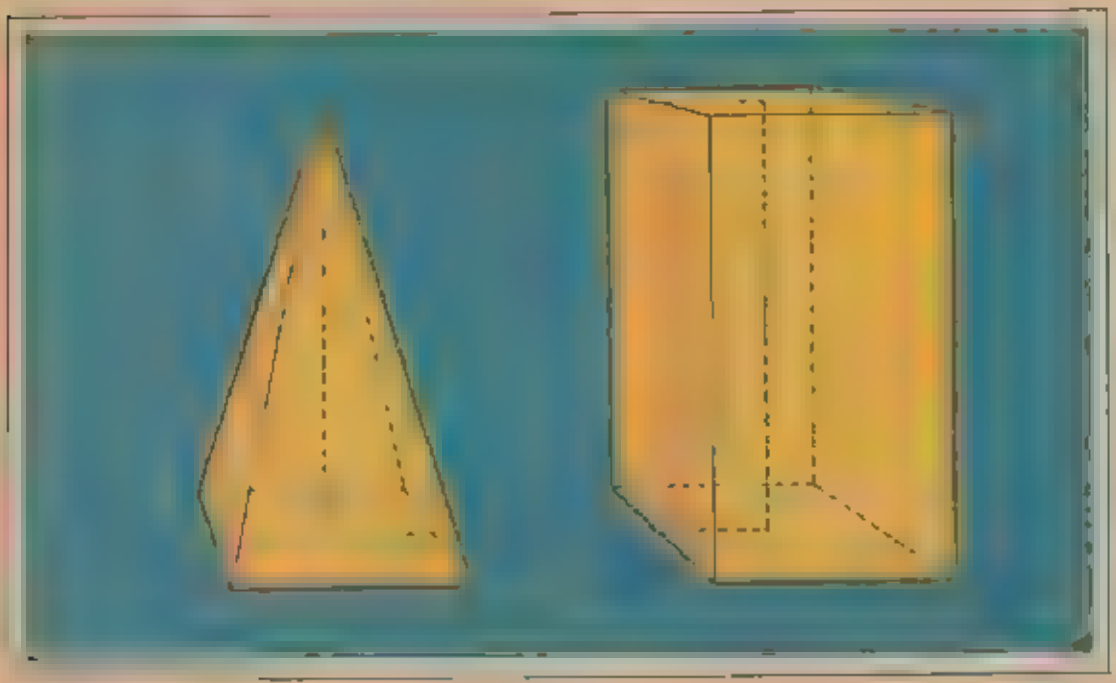
Necesitas·

Material para modelar (plastilina, mastique, sebo, parafina o otro material que no se disuelva ni absorba agua)

Un frasco cilíndrico y un lápiz.



En la primera parte del experimento modela una pirámide de base cuadrangular y un prismo que tenga la misma base y la misma altura que la pirámide ya hecha.



En la segunda parte del experimento vamos a medir el volumen por el procedimiento de sumergirlos en agua. Para esto necesitas tener agua en el frasco, marcar el nivel, sumergir el prisma completamente y marcar hasta donde llegó el agua. Saca el prisma y rectifica que el agua llegue al nivel original.

Antes de sumergir la pirámide de igual base y altura que el prisma contesta:

¿tendrá el mismo volumen la pirámide que el prisma? _____

¿tendrá más? _____ ¿tendrá menos? _____

Sumerge la pirámide en el frasco y marca hasta donde llegó el agua.

Comparando las marcas que pusiste en el frasco di, ¿cuál de los dos cuerpos tiene mayor volumen? _____

¿Qué parte del volumen del prisma es el volumen de la pirámide?

_____

Recuerda que usaste un prisma y una pirámide de la misma base y altura.

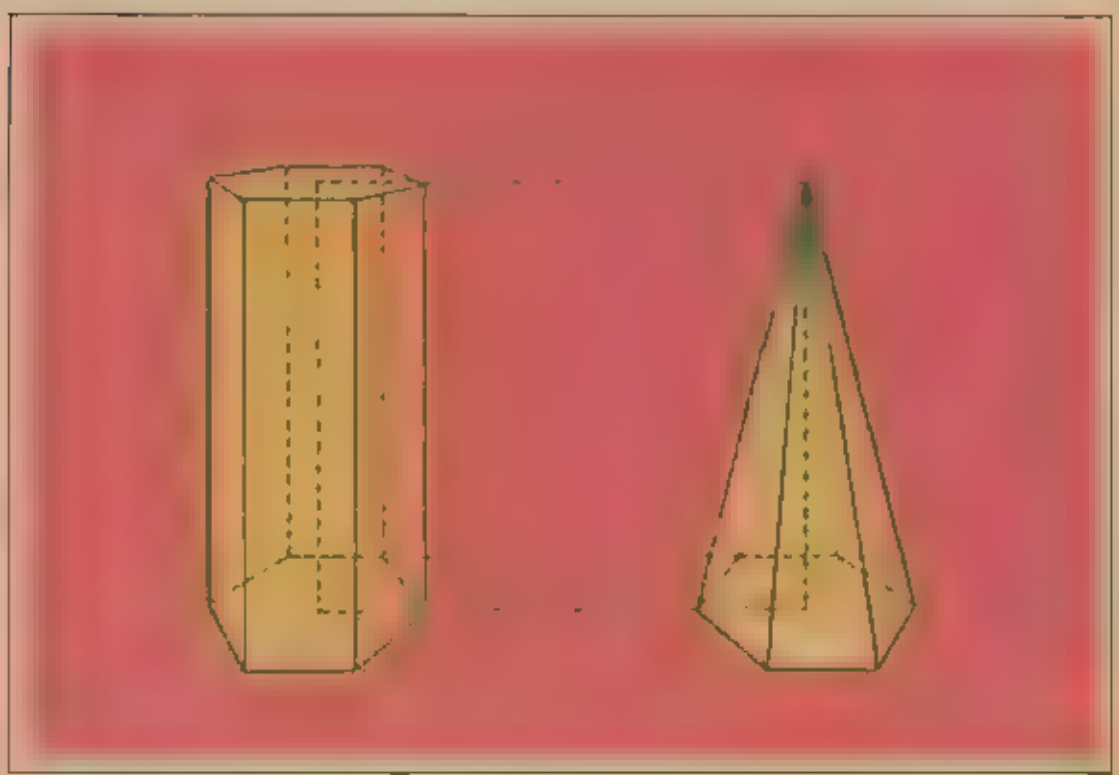
La relación que encontraste en el experimento entre el volumen de un prisma y el de una pirámide es válida para todos los prismas y pirámides siempre y cuando tengan la misma base y altura. Es decir el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma de igual base y altura que e la.

O sea:

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{\text{Volumen del prisma}}{3}$$

Como Volumen del prisma = Área de la base por altura
entonces:

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{\text{Área de la base por altura}}{3}$$

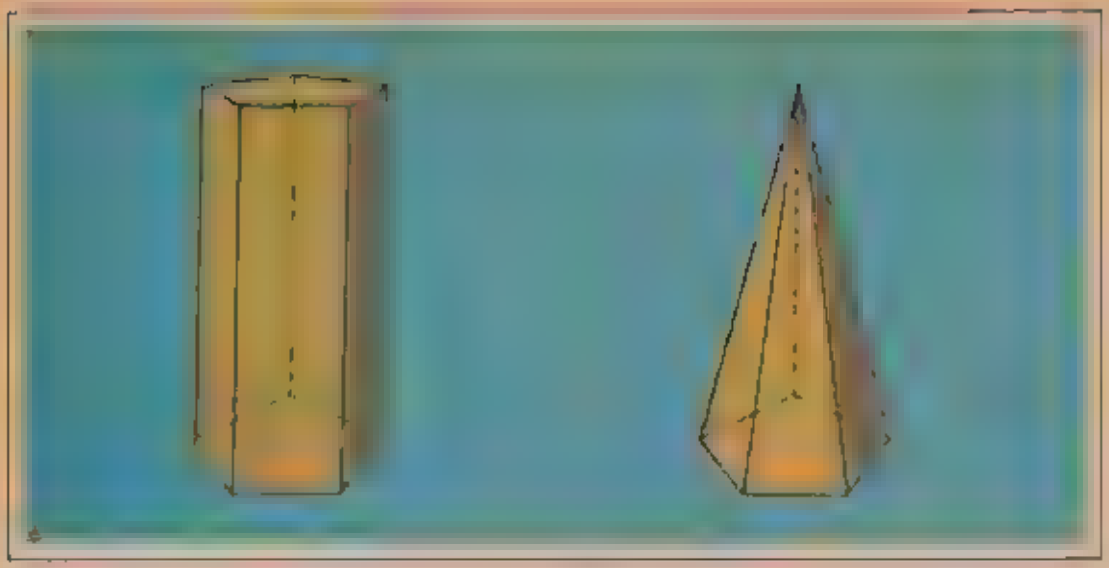


Los cuerpos aquí representados son un_____

y una _____que tienen igual base e igual altura.

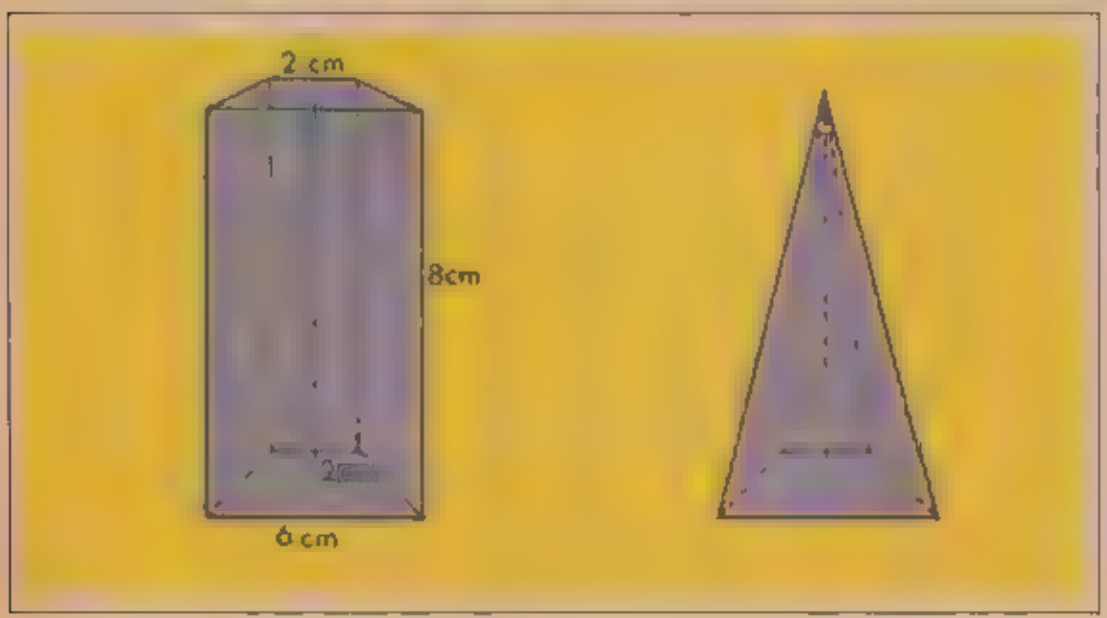
¿Cuál tiene menor volumen?_____

Si el volumen del prisma es 12 cm , ¿cual es el volumen de la pirámide?_____



Estas figuras representan un prisma y una pirámide pentagonales, su altura y su base son iguales.

Si la pirámide tiene 23 cm de volumen, ¿cuál es el volumen que tiene el prisma?



En la figura de arriba estan representados un prisma y una piramide de igual base y altura y junto a ellos sus dimensiones

¿Cómo obtienes el volumen del prisma?

¿Cuál es el volumen del prisma?

¿Como obtienes el volumen de a piramide?

¿Cuál es el volumen de la pirámide?

¿Cual sera el volumen de un prisma rectangular que mide 15 cm de largo, 8 cm de ancho y 24 cm de altura?_____

¿Cual será el volumen de una pirámide rectangular que tiene las mismas medidas que el prisma anterior? _____

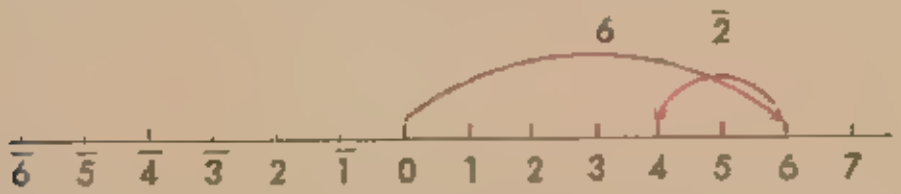
La Gran Piramide de Kéops en Egipto tiene una base cuadrada de 230 m por cada lado y 153 m de altura, ¿qué volumen ocupa esta pirámide?

Suma y resta de enteros

Recuerda como hemos representado los enteros en la recta. Recuerda que sumar es correrse hacia la derecha o la izquierda segun que el número no tenga o tenga una barra.

Por ejemplo: $6 + \overline{2} = 4$

ya que por el 6 vamos 6 unidades a la derecha y por el $\overline{2}$ vamos 2 unidades a la izquierda, quedando en el 4.



Efectúa las siguientes operaciones auxiliándote, si es necesario, con la recta numérica de arriba

$9 + \overline{3} =$
$3 + \overline{4} =$
$11 + \overline{7} =$
$7 + \overline{8} =$
$0 + \overline{5} =$
$10 + \overline{6} =$

$8 + \overline{8} =$
$4 + \overline{4} =$
$7 + \overline{7} =$
$\overline{5} + 5 =$
$\overline{10} + 10 =$
$25 + \overline{25} =$
$17 + \overline{17} =$

En cada caso escribe el número perdido.

$6 + \square = 0$
$3 + \square = 0$
$9 + \square = 0$
$11 + \square = 0$
$1 + \square = 0$

$6 - \square = 0$
$3 - \square = 0$
$9 - \square = 0$
$11 - \square = 0$
$1 - \square = 0$

Los números que al sumarse dan cero se llaman **simétricos** o **inversos aditivos**. Localiza los anteriores en una recta numérica y veras el por qué se llaman **simétricos**.

Completa lo siguiente:

El simétrico de 5 es $\square$
El simétrico de $\overline{3}$ es $\square$
El simétrico de 8 es
El simétrico de 21 es
El simétrico de 26 es
El simétrico de $\overline{14}$ es $\square$
El simétrico de $6\overline{3}$ es
El simétrico de 74 es $\square$
El simétrico de $\overline{10}$ es $\square$

Encuentra el número perdido y escribelo dentro de cada cuadra:

$7 + \square = 3$
$8 + \square = 1$
$15 + \square = 14$
$0 + \square = \overline{3}$
$3 + \square = 2$

$7 - \square = 3$
$8 - \square = 1$
$15 - \square = 14$
$0 - \square = \overline{3}$
$3 - \square = 2$

Escribe el número que hace falta en el cuadro para que se cumpla la igualdad:

$7 + \overline{5} = 7 - \square$
$3 + \overline{2} = 3 - \square$
$11 + \square = 11 - 4$
$15 + \square = 15 - 3$
$20 + \overline{6} = 20 - \square$
$23 + \overline{3} = 23 - \square$
$28 + \square = 28 - 20$
$9 + \square = 9 - \square = 5$

En la última operación al número 9 le **sumaste** el número $\square$ y le **restaste** el número $\square$

¡Y los resultados son iguales!

De modo que **sumarle** a una cantidad $\overline{4}$ es lo mismo que **restarle** 4.

¿Qué es $\overline{4}$ de 4?_____

Si a un numero le sumas 5 obtienes lo mismo que si le **restas**_____.

Sumar $\overline{6}$ es lo mismo que restar $\square$
Sumar $\square$ es lo mismo que restar 1
Sumar $\overline{9}$ es lo mismo que restar $\square$
Sumar $1\hat{3}$ es lo mismo que restar

En general- "sumar un numero es lo mismo que restar su simétrico".

Restar 12 es lo mismo que sumar
Restar 8 es lo mismo que sumar $\square$
Restar 16 es lo mismo que sumar $\square$
Restar $\overline{4}$ es lo mismo que sumar
Restar $\overline{7}$ es lo mismo que sumar $\square$

En general, ' restar un número es lo mismo que_____ su simétrico".

Sabiendo, como ya lo obtuvimos, que restar un numero es lo mismo que sumar su simetrico, cambia las siguientes restas a sumas y después resuélvelas:

Ejemplos:

$7 - 5 = 7 + \overline{5} = 2$ porque el simétrico de 5 es $\overline{5}$
$9 - 3 = 9 + 3 = 12$ porque el simétrico de $\overline{3}$ es 3
$4 - 2 = 4 + \quad =$
$20 - 8 = 20 + \quad =$
$24 - 10 = 24 + \quad =$
$3 - \overline{2} = 3 + \quad =$
$18 - 10 = 18 + \quad =$
$3 - 1 = 3 + \quad =$
$15 \quad 15 \quad 15 + \quad =$
$2 - 3 \quad \overline{2} + \quad =$
$0 - 4 - 0 + \quad =$
$0 - \overline{6} = 0 + \quad =$
$21 \quad 7 =$
$16 - \overline{4} =$
$34 - 8 =$
$40 - \overline{40} =$
$20 - 30 =$
$12 \quad 16 =$
$21 \quad 27 =$
$42 - 80 =$

A continuacion se dan las fechas de nacimiento y muerte de algunos personajes, calcula la edad que tenían al morir.

Los años "antes de Cristo" se representan como números negativos, ejemplo 28 significa 28 años antes de Cristo y 43 significa 43 años después de Cristo.

	nació	murió	edad
Matematico francés René Descartes	1596	1650	——
Matemático y físico inglés Isaac Newton	1643	1727	——
Inventor, pintor y escultor italiano Leonardo da Vinci	1452	1519	——
Filósofo romano Séneca	$\overline{4}$	65	——
Navegante, explorador y literato griego Estrabon	$6\overline{3}$	24	——
Literato griego Tito Livio	59	17	——
Literato romano Virgilio	$7\overline{0}$	19	——
Literato romano Cayo Julio César	100	44	——

Un señor tenía $ 18.00. Gastó $ 20.00.

¿Cuánto dinero le queda?

¿Qué operación debes hacer?

¿Qué resultado te da esta operación?

¿Cómo interpretas el resultado?

Estadística, probabilidad y zapatos tenis

El gobierno de un país le encargó a una fábrica que hiciese zapatos tenis (zapatos para deporte), de manera que pudiera darse un par de estos zapatos a cada escolar (niño o niña) del sexto año de primaria.

En ese país había 100,000 (cien mil) escolares de sexto año. Así la fábrica ya sabía cuantos pares de zapatos tenía que hacer. Pero hay un problema dijeron los de la fábrica ¿de qué medida hacemos los zapatos?

Pensaban que la talla del pie en esos niños variaba entre 20 y 24 cm. Alguien sugirió hagamos todos los zapatos de la talla promedio.

¿Cuál es la talla promedio entre 20 y 24?_____¿Te parece esta una buena solución?_____¿Por que?_____

_____

Otra persona sugirió: hagamos igual numero de zapatos de cada talla.

¿Cuántos habría que hacer en este caso de cada talla?

¿Te parece una buena solución?_____¿Por qué? _____

_____

Otra persona sugirió: vamos a medirle el pie a cada niño de 6o. de primaria y luego contamos los que hay de cada una.

¿Cuántos pies tendrían que medir?_____

¿Te parece una buena solucion?_____¿Por qué? _____

_____

¿Podrías sugerir alguna otra solución? _____

¿Cuál? _____

_____

¿Cómo podríamos saber aproximadamente cuántos niños hay con cada talla de pie? ¿Te acuerdas de cómo se trató de saber las canicas de cada color que había en la caja? ¿Te sugiere esto algo? ¿Qué te sugiere?_____

_____

Haz una tabla de tallas de los compañeros de tu salón. Anota en ella las tallas y el número de compañeros con esa talla de pie.

TALLA					TOTAL NIÑOS
NUMERO DE NIÑOS					

Calcula las proporciones de cada talla Por ejemplo, si en tu salon son en total 30 alumnos y de ellos hay 7 que tienen talla 24, entonces la proporcion de talla 24 es $\frac{7}{30}$

TALLA					
PROPORCION					

La suma de todas las proporciones debe darte 1. Compruébalo

Si la fabrica de zapatos, para fabricar los 100,000 pares de zapatos, toma las mismas proporciones en cada talla que hay en tu salón, ¿cuantos pares de zapatos hará de cada talla?

TALLA						
CANTIDAD						

El Seguro Social

Segun lo indica la Ley del Seguro Social en su Artículo 2o. del Título Primero:

"La seguridad social tiene por finalidad garantizar el derecho humano a la salud, la asistencia médica, la protección de los medios de subsistencia y los servicios sociales necesarios para el bienestar individual y colectivo."

Para conseguir algunas de estas finalidades existen disposiciones respecto a lo que debe hacerse en casos de accidente de trabajo, enfermedad o maternidad.

Por ejemplo, si un trabajador sufre un accidente en el trabajo o padece una enfermedad producida por la naturaleza de su trabajo entonces tiene derecho a.

"un subsidio igual al 100% del salario, mientras tenga incapacidad temporal para trabajar, hasta por 72 semanas". Si la incapacidad se hace permanente entonces tiene derecho a una pensión que depende de su salario.

El papá de Vicente trabaja en una imprenta. Tiene un salario de $ 52 00 diarios Al trabajar con una maquina sufre un accidente lastimandose una mano Lo atendieron en una clínica del Seguro Social y los médicos consideraron que tardaría 20 dias en poder regresar al trabajo ¿Cuanto dinero deben darle al papá de Vicente, en los dias que no va al trabajo? _____

_____

En caso de que una trabajadora vaya a tener un niño se le debe dar "subsidio diario en dinero igual al 100% del salario promedio del grupo salarial de la trabajadora, durante 42 dias antes y 42 días después del parto".

Supongamos que una obrera gana 25 pesos diarios, en este caso el grupo salarial es entre $ 22 00 y $ 30.00. ¿Qué subsidio total debe recibir esta obrera en caso de que tenga un niño?_____

_____

Unas cantidades están en función de otras

Una persona que vive en Zinapécuaro, Michoacán, fue a Morelia en automovil y gasto 7 litros de gasolina. Después viajó de Morelia a Cuitzeo, ¿en cuál de estos recorridos gastó más gasolina?

¿Cuántos kilometros recorre su automovil con un litro de gasolina?

Con el mismo automovil, ¿qué cantidad de gasolina gastaría para ir de La Piedad a Purépero?

¿y de Morelia a Zacapú?

Como ya calculaste la relación entre el gasto de gasolina y el kilometraje, completa esta tabla

Litros de gasolina utilizados	Kilómetros recorridos
1	
2	
3	
4	
	42
10	
0	
$\frac{1}{2}$	

La Presidencia Municipal de San Lorenzo quiere mandar construir una zanja para drenaje. Esta zanja tiene una longitud de tres km Para calcular cuántos trabajadores se necesitan y el tiempo en que terminarán, se conocen por otros pueblos que ya han hecho su drenaje, estos datos.

50 hombres construyen los 3 km en 30 días
25 hombres construyen los 3 km en 60 días
100 hombres construirán los 3 km en ___ días

¿El tiempo que se tardan en construir, depende del numero de trabajadores?_____¿Por qué?_____

Entre más hombres sean, ¿tardan mas o menos tiempo?_____

Si duplicamos el número de hombres, el tiempo que tardan será la mitad.

Si triplicamos el número de hombres, el tiempo que tardan sera

_____

Si reducimos a la mitad el número de hombres, el tiempo que tardan será _____

Si reducimos a una quinta parte el número de hombres, se tardarán_____veces más.

A partir de la informacion que ya tienes termina tú esta tabla

Número de trabajadores	días que tardarían
50	
25	
100	
20	
	25
30	
	20

Cada trabajador gana $ 60.00 diarios y se dispone como máximo de $ 2,500 00 diarios para sueldos, ¿cuántos trabajadores pueden contratarse si se quiere terminar la zanja antes de dos meses?

Implicaciones falsas o verdaderas

Señala si cada una de las proposiciones que se dan es falsa (F) o verdadera (V), encerrando la letra correspondiente.

Todos los diputados son mexicanos F V
Todos los mexicanos son diputados F V

Si ladra, es un caballo F V
Si es un caballo ladra F V

Invierte las proposiciones como en los dos ejemplos anteriores.

En cada proposicion señala si es falsa o verdadera.

Si es un automóvil, tiene ruedas F V
Si tiene _____ F V
Si vive a expensas de otro es un parásito F V
_____un parásito _____ F V
Si tiene pulmonía, está sano F V
Si está _____ F V
Si está hecho de asbesto se quema F V
Si se _____ F V

Si es la mitad de 1 es $\frac{1}{2}$ F V

Si es _____ F V
Los niños son seres humanos F V
Los seres _____ F V

Observa que en algunos casos las dos proposiciones son verdaderas, en otras las dos son falsas, en otras una es falsa y la otra verdadera.

Experimento:

En problemas anteriores hemos visto que hay cantidades que dependen unas de otras, esa dependencia no siempre es igual En algunos casos cuando una cantidad aumenta, la otra también aumenta; en otros, cuando una disminuye la otra aumenta, etc

Vamos a rea izar un sencillo experimento para que tu mismo compruebes la dependenc a entre dos cantidades el alargamiento de una liga y el peso o fuerza que se le aplica.

Necesitas una liga, una bolsita, un lapiz, una regla y varios ob etos del mismo peso (canicas, monedas, balines, etc.).

Corta la liga y amarra un extremo al lapiz y otro a la bolsita, sujeta el lapiz horizontalmente para que la bolsita cuelgue libre

Coloca en la bolsita uno de los objetos para que la liga quede tensa, éste no lo contamos.

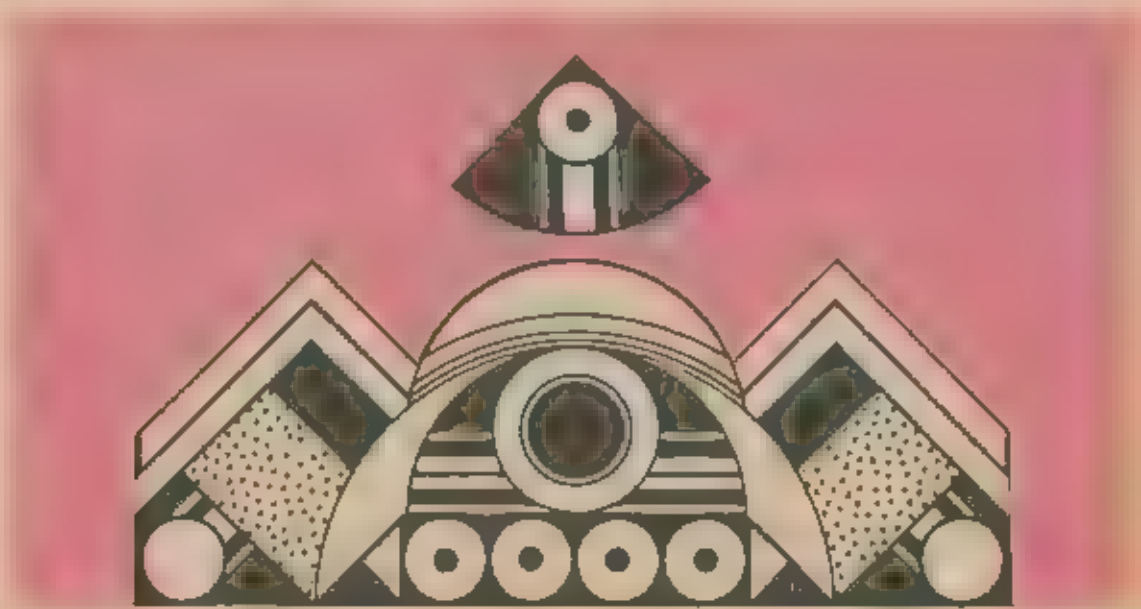
Ahora mide el largo de la liga (distancia entre los nudos), ésta será nuestra **longitud inicial**. Usa la tabla de la pagina que sigue Ve colocando objetos en la bolsita de uno en uno y en cada caso mide el nuevo largo de la liga, anotalo en la columna central de la tabla, réstale la longitud inicial para tener el alargamiento que ha sufrido la liga y anótalo en el lugar correspondiente de la tabla.

Completa esta tabla con tus datos.

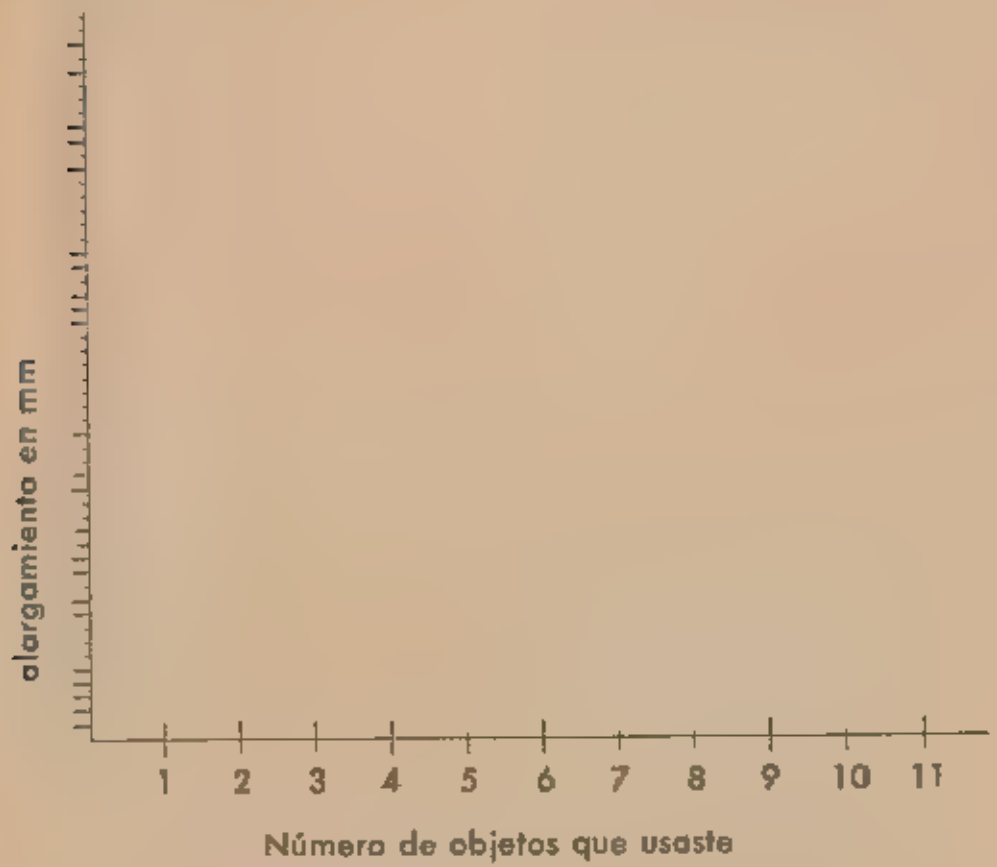
longitud inicial _____ mm

número de objetos en la bolsa	longitud que alcanza	alargamiento (longitud que alcanza menos longitud inicial)
0		
1		0
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Al igual que en todos los casos en que una cantidad depende de otra, se puede hacer una gráfica con el uso de rectas numéricas



Marca en este plano los puntos, localizando en el eje horizontal el numero de objetos y sobre el vertical el alargamiento correspondiente.



Trata de unir con una linea los puntos que obtuviste.

En esta gráfica esta permitido unir los puntos porque a valores intermedios les corresponde algún alargamiento

Ejemplo si agregas un objeto que pese la mitad de lo que pesa uno de los que usaste, ¿habría un alargamiento correspondiente a ese peso?

¿Cuánto se alargará la liga si pones el peso de $4\frac{1}{2}$ objetos?____

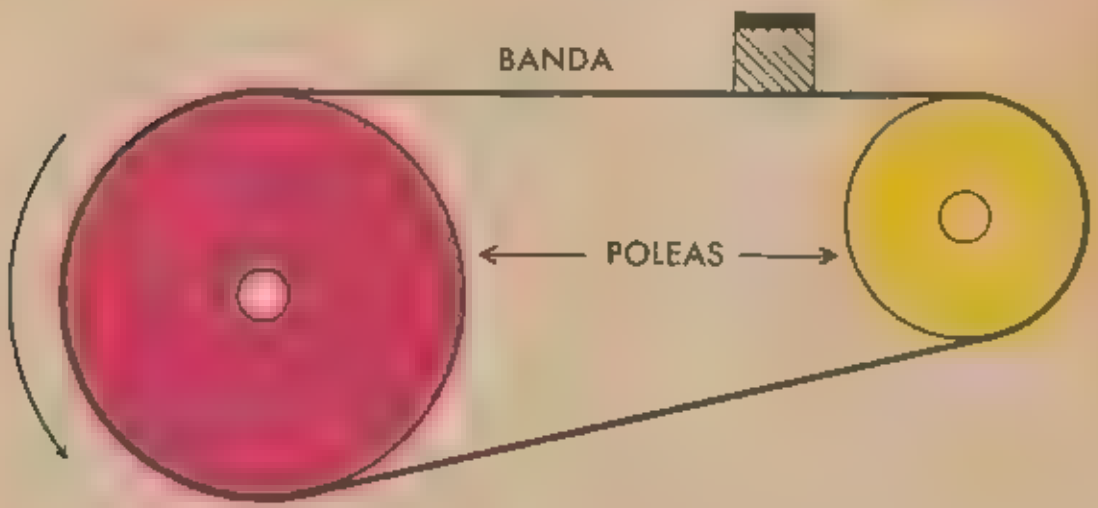
_____

¿Y si pones el peso de $5\frac{1}{3}$ objetos? _____

¿Se arargo lo mismo la liga al poner el tercer objeto que al poner el noveno?_____

Poleas y bandas

Otro mecanismo, además del de engranes, que se utiliza para transmitir el movimiento es el que consiste de poleas unidas con una banda que no se patina, como se ilustra a continuación.



Si la polea roja gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, ¿en qué sentido gira la polea **amarilla?** _____

Mide los diámetros de las poleas.

Diámetro de la polea roja_____cm.

Diámetro de la polea amarilla____cm.

La polea roja está a escala_____a_____de la amarilla

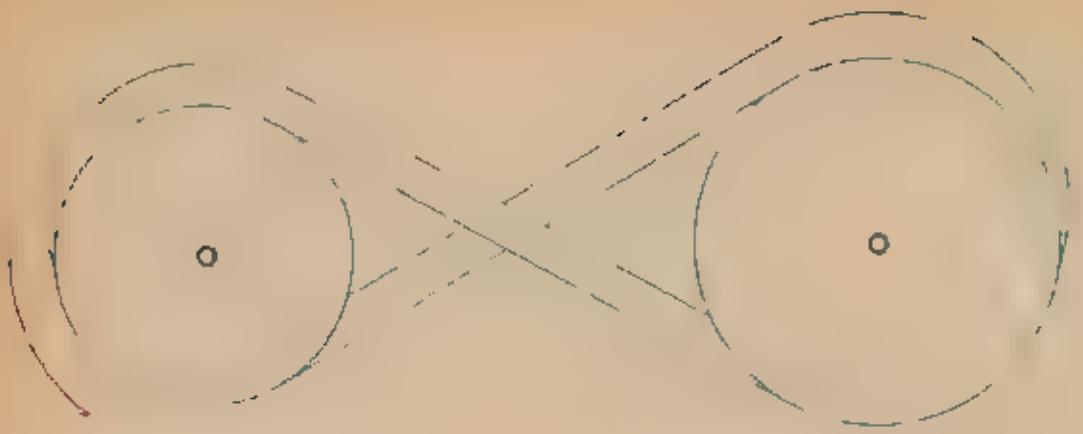
Por cada vuelta de la polea roja, ¿cuántas vueltas da la amarilla?

Observa que la relacion entre el número de vueltas que da la polea mayor y el numero de vueltas que da la polea menor es el inverso de la escala a la que estan sus diametros.

En este caso la relacion de diametros de la polea roja a la amarilla es 2 a 1 y la relacion de vueltas que da la polea roja a las vueltas **que da la amarilla es 1 a 2.**

Pensando en las poleas de la ilustracion, si la roja da una vuelta, ¿cuantos cm avanza el cuerpo que está sobre la banda? _____ ¿en qué dirección? _____

Observa estas otras poleas



Estas poleas estan unidas por una banda cruzada

Mide sus radios.

¿A que escala está una de la otra?_____

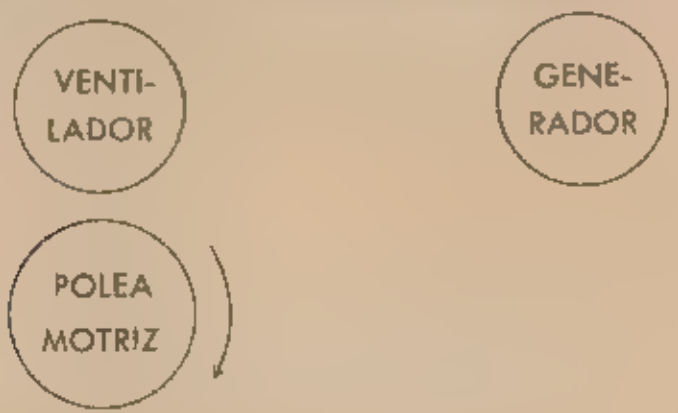
Si la polea menor da 12 vueltas en la d'reccion contraria a las manecillas de un reloj, ¿en qué sentido gira la otra polea?_____

¿Cuántas vueltas da?_____

¿Para qué se usa la banda cruzada? _____

Un motor de un automovil necesita enfriarse por med o de un ventilador y d sponer de un aparato que produzca energ'a eléctrica (generador). Tanto el vent ador como el generador funcionan por medio de una polea, cada uno.

Si las po eas estan colocadas en esta posicion



¿Como colocarias una banda de manera que la polea del motor (polea motr'z) mueva a as otras dos?

¿Giran las tres poleas en el mismo sentido? _____.

Tienes los siguientes datos:

Polea motriz, 14 cm de diametro y da 3 000 vueltas por minuto

Polea del generador· 7 cm de diámetro.

Polea del ventilador: da 3 500 vueltas por minuto.

Utilizando los datos anteriores, contesta:

¿Cuántas vueltas por minuto da el generador?_____

¿Cuanto mide de diámetro la polea del ventilador? _____

Por alguna circunstancia se necesita enfriar más el motor, ¿cómo lo lograrías?_____

Si queremos que el ventilador dé 4 000 vueltas por minuto, para lograr un mejor enfriamiento del motor, sin modificar la polea motriz, ¿qué diametro tendra la polea del ventilador?

En esta foto se muestra el mecanismo que proporciona energia e éctrica en una bicicleta.

Este mecanismo funciona como un juego de engranes

De ser posible, mide los diámetros reales de la rueda de una bicicleta y de la polea de la dinamo y calcula cuantas vueltas da la dinamo por cada vuelta de la rueda de la bicicleta.

Un corral para los borregos

En un poblado del Estado de México un grupo de campesinos se reunió para construir un corral para borregos. La idea era tener un lugar donde colocar muchos borregos para los días de venta. Los campesinos pensaron hacer el corral con malla de alambre. La malla les costaba $ 10.00 el metro. Reunieron entre todos $ 600.00. ¿Cuántos metros de malla podían comprar? _____

Entonces pueden construir un corral cuyo cercado midiese en total 60 m de longitud.

¿Qué forma le damos al corral, para que nos entren más borregos? —preguntó uno de ellos.

—Pues le damos cualesquier forma —comentó otro— de todas maneras solo podemos tener 60 metros de cercado, y como le hagamos han de caber los mismos animales.

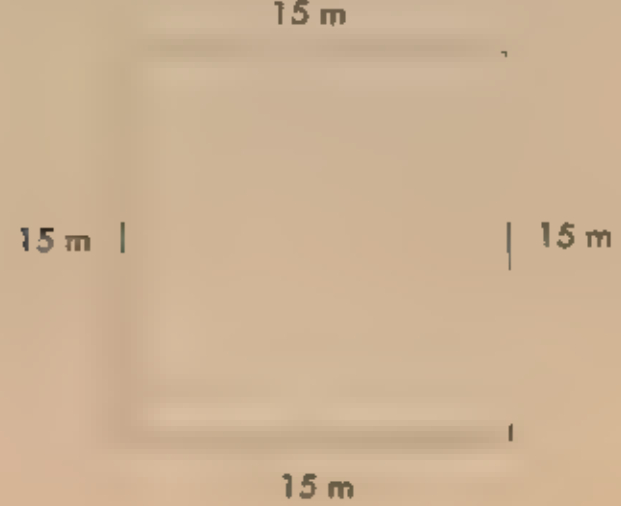
¿Crees que tiene razón quien hizo este comentario? _____

¿Por qué? _____

¿De qué depende el número de borregos que quepan en el corral?

—Vamos haciendo un corral cuadrado —propuso alguien.

Si hiciesen un corral cuadrado, se vería así



Perímetro = 15 + 15 + 15 + 15 = 60 m

Tambien podemos hacer un corral rectangular con lados de 20 m y 10 m —intervino un cuarto.

Si hiciesen un corral rectangular con lados de 20 m y 10 m, se vería así

20 m

10 m 10 m

20 m

Perímetro = 20 + 10 + 20 + 10 = 60 m

—¿Cómo sabemos cual es mas ventajoso, en cual caben mas animales? —se preguntaron varios.

—Calculando el área de dentro —respondio alguien que recordaba lo estudiado en la escuela.

En el caso del corral cuadrado, el área sería

$15 \times 15 =$ _____ m^2

En el caso del corral rectángular el área sería

$20 \times 10 =$ _____ m^2

Si suponemos que caben 3 animales por cada m , ¿cuantos animales caben en cada caso?

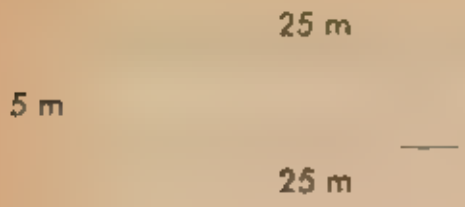
En el corral cuadrado caben _____ borregos

En el corral rectangular caben _____ borregos

Como vemos, con el mismo material de cercado pueden hacerse corrales con distinta capacidad.

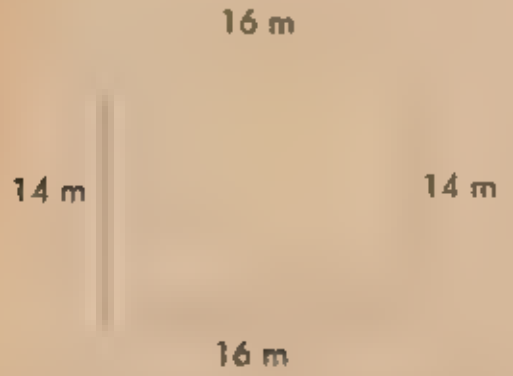
Al darse cuenta de esto, los campes nos decidieron estudiar mejor el problema, pues les convenía sacar el mejor provecho de su material.

Otro campesino propuso este corral



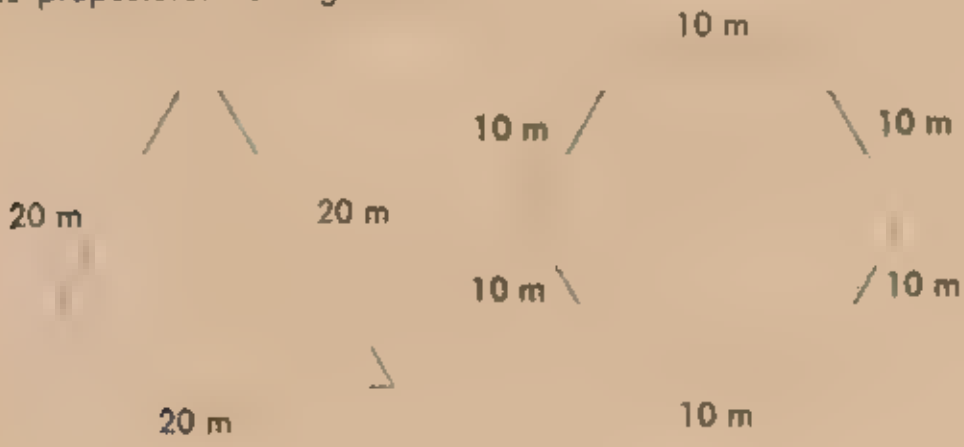
Perímetro = _____ m
Area = _____ m^2
Borregos que caben = _____

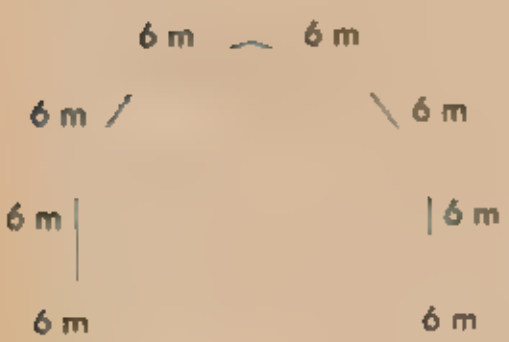
Uno más propuso este



Perímetro = _____ m
Area = _____ m^2
Borregos que caben = _____

Otros propusieron los siguientes corrales·





con 60 m de circunferencia

Para calcular las áreas encerradas en estos corrales necesitamos, la altura en el caso del triangulo, la apotema en el caso de los polígonos, el radio en el caso circular.

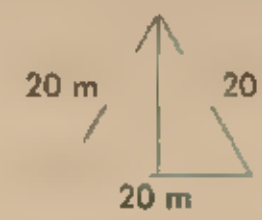
Para conseguir estos datos pueden proceder de dos maneras:

Primera. Dibujar cada caso a una escala conveniente en papel. Por ejemplo escala 1 a 100, donde 1 cm representa 1 m Medir el dato que se necesita y luego multiplicarlo por 100 El caso circular no se puede hacer así, pero si directamente de la fórmula $C = \pi \times d$, como ya han hecho antes.

Segunda. Conseguir un cordel de 6 m y representar en el patio cada una de las figuras por medio de estaquitas y el cordel con un perímetro de 6 m. En este caso la escala seria de 1 a_____. Se hacen las mediciones en el patio y se multiplican por 10. La circunferencia se puede aproximar bien con **muchas** estaquitas.

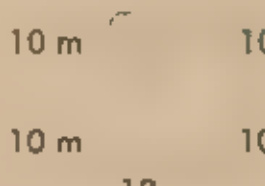
Habiendo obtenido estos datos que les hacen falta pueden estudiar los otros casos que se propusieron

Altura
___ m



Perímetro = _____ m
Área = _____ m²
Borregos que caben = _____

Apotema:
___ m



Perímetro = m
Área = _____ m²
Borregos que caben = _____

Apotema:
___ m

Perímetro = _____ m
Área = _____ m²
Borregos que caben = _____

Radio:
___ m

Perímetro = 60 m
Área = _____ m²
Borregos que caben = _____

No es de extrañarse que los campesinos hicieran su corral en forma

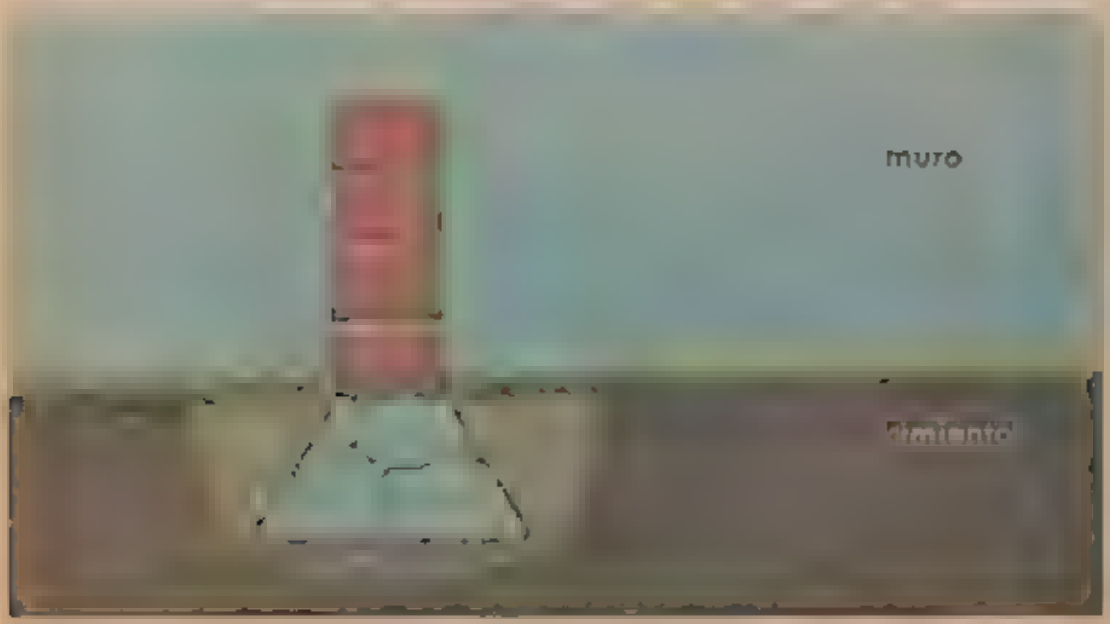
_____

Trapecios, prismas y cimientos

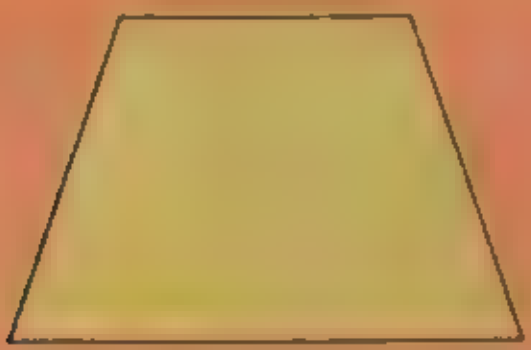
Seguramente ya has estudiado el **trapecio**, recuerda que es un cuadrilátero.

Vamos a estudiar un ejemplo en el que el trapecio es útil. Cuando se construye una casa de cierto peso, primero se le hace un **cimiento**, que es como una barda de piedra, encima de la cual se hace la construcción (mira la ilustración).

Visto de frente, se ve así



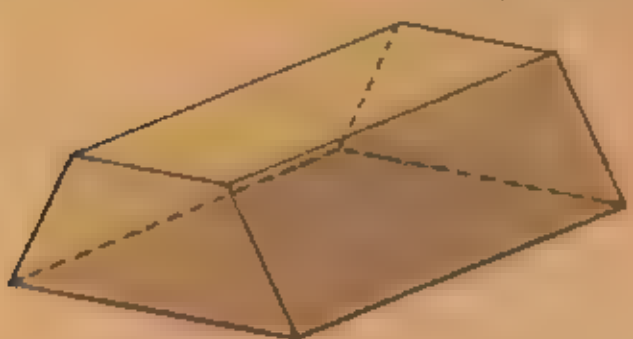
Esto es, el corte seccional del cimiento es un **trapecio**



Un tramo de cimiento es, por lo tanto, un **prisma trapezoidal.**

El cimiento cumple una función muy importante, aumenta la superficie de apoyo en el suelo de la construccion

Superficie donde se apoya el muro

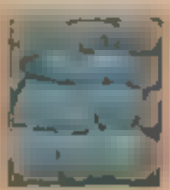


Superficie donde se apoya el cimiento en el suelo

Distribuye el peso del muro en una superficie más grande. La manera de construir el cimiento depende de lo que aguante el suelo. Observa la ilustración para entender mejor la idea.

Suelo muy aguantador Suelo menos aguantador Suelo blando

En un suelo muy aguantador la superficie de apoyo del muro es igual a la superficie de apoyo del cimiento. En este caso el cimiento es rectangular.



En un suelo menos aguantador la superficie de apoyo del cimiento debe ser el **doble** de la del muro. En este caso el cimiento es trapezoidal

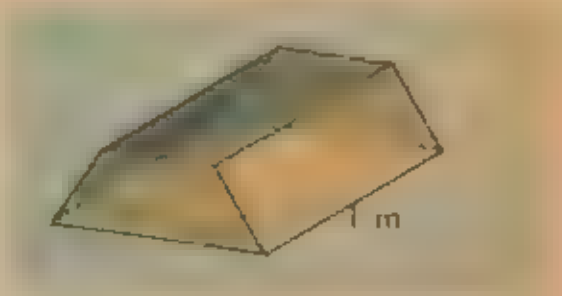
y la base inferior es el doble de la base superior.

En un suelo blando la superficie de apoyo del cimiento debe ser el **triple** de la del muro. En este caso el cimiento es trapezoidal

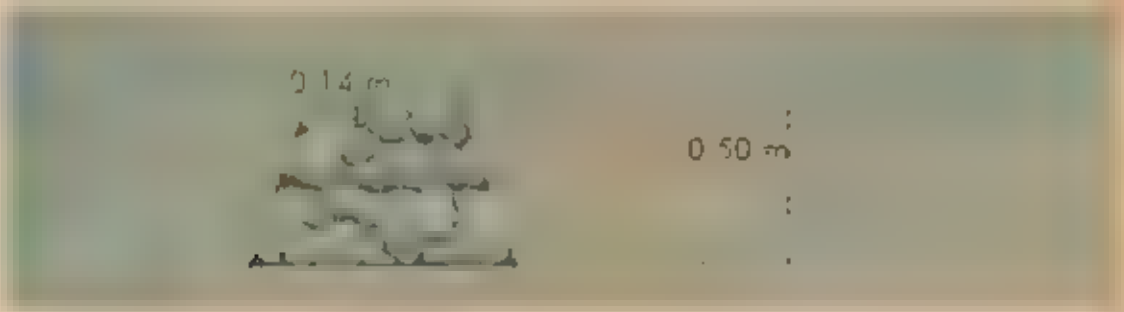
y la base inferior es el triple de la base superior.

Un metro lineal de cimiento es un tramo de cimiento de un metro de largo

1 metro lineal de cimiento =



Vamos a suponer que la altura de cimiento siempre es de 0.50 m y que la base superior, donde apoya el muro es de 0.14 m



¿Cuál es el volumen de piedra, en m³, que necesitas por metro lineal de cimiento en

1) un suelo muy aguantador?
2) un suelo menos aguantador?
3) un suelo blando?

Si el m³ de piedra cuesta 100 pesos, ¿cuánto gastas en piedra por cada metro lineal de cimiento, en cada caso?

Silos: cilindro y cono

María Luisa viajaba en un autobús con sus compañeros del sexto grado en una excursión organizada por la escuela. En el camino vio unas construcciones de forma conica, como las de esta fotografía:

—¿Qué son esas cosas, maestra? —preguntó

—Son silos.

—¿Para qué sirven?

—Para almacenar grano —dijo la maestra—. Cuando se recoge la cosecha se guarda en estos silos, en espera de que sea transportada a los centros donde se consume.

—Se ven muy bonitos —comento alguien.

—Pero es raro que algo que sirve de almacén tenga esa forma, por lo general son cilindros o prismas, como los tinacos, los botes, las bodegas y otros —comentó alguien más.

—¿Cuanto cabe en esos silos? —preguntó María Luisa.

—Eso no es difícil de averiguar, señor chofer —se dirigió la maestra a quien guiaba el autobús en que viajaban— ¿podríamos detenernos por aquí?

—¿Alguien tiene un hilo o algo con que medir? —preguntó la maestra.

—Aquí traigo una cinta métrica —dijo el chófer.

—Vengan —dijo la maestra - vamos a tomar algunas medidas y mañana en la clase les enseñaré como hacer los cálculos para saber lo que cabe en esos silos conicos

Se dirigieron hasta el primero de los silos Con el metro m'dieron la circunferencia de la base del cono y apuntaron el dato.

Circunferencia de la base del silo 37.7 m.

—Párate aquí al sol, María Luisa —le pid'ó la maestra— vamos a medir tu estatura y el largo de tu sombra —hicieron las mediciones y anotaron.

Estatura de María Luisa 1.40 m.

Largo de la sombra de María Luisa 1.26 m.

Y ahora, de inmediato, medimos el largo de la sombra del silo —dijo la maestra. Hicieron la medición.

Largo de la sombra del silo 3 m.

—B'en, con los datos podremos hacer los cálculos mañana, ahora —decía la maestra cuando el chofer la interrumpió.

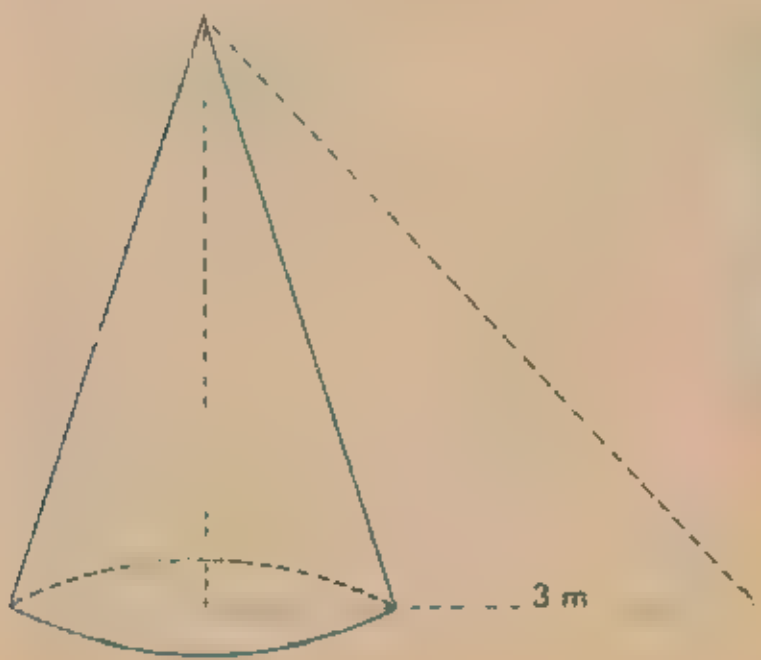
—Oiga maestra, ya me entró la curiosidad, ¿cómo van a hacerle?, ¿no podríamos hacerlo aquí? Total con el suelo y un palito se tiene un pizarrón.

—Sí, maestra, de una vez —dijeron a coro los niños.

—Está bien, está bien —dijo complacida la maestra.

Esta es la explicación que dio la maestra. Síguela con cuidado y ve haciendo los cálculos para tener la respuesta.

La maestra hizo este diagrama:



La circunferencia de la base del cono es de 37.7 m. ¿Cómo calculamos el radio de la base?

Conoces la fórmula para la circunferencia

$$C = \pi \times d$$

C = circunferencia

d = diámetro

π = 3.14

En nuestro caso

$$37.7 = 3.14 \times d$$

Por lo tanto

$$d = \frac{37.7}{3.14} = ____ \text{ m}$$

Como el diámetro son_____m, entonces el radio, que es la mitad, son_____m.

El largo total de la sombra del silo, desde el centro del silo, es

3 + _____ = _____ m

Fíjense que el "triángulo" que forma María Luisa con su sombra es una reducción a **escala** del "triangulo" que forma el silo con su sombra (contada desde el centro del silo).

¿Cuál es la escala? Para saberlo nos basta dividir el largo total de la sombra del silo entre el largo de la sombra de María Luisa. Esto es, hacemos la operación

_____ ÷ 1.26 = _____

Si ahora multiplicamos este último número por la altura de María Luisa, obtenemos la altura del silo. Hacemos la operación.

_____ × 1.40 = _____ m

El resultado debe ser aproximadamente 10 m. Si no es así, revisa tu trabajo.

Como ya conoces la altura del silo y el radio de su base, puedes calcular su volumen, esta es la fórmula

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\text{área base} \times \text{altura}}{3}$$

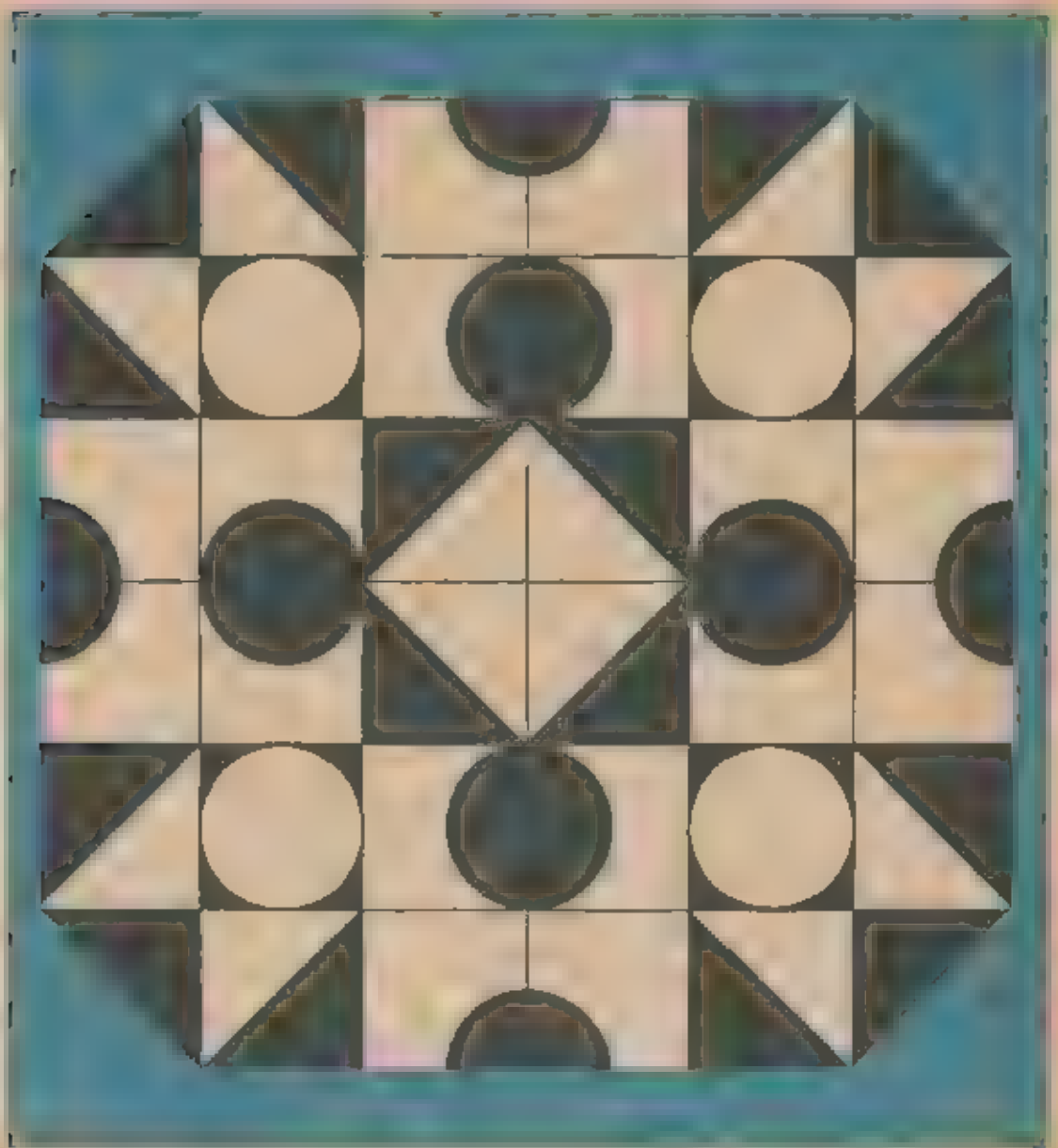
Calcula el volumen del silo

Volumen del silo = _____ m^3

¿Cuál sería el volumen de un silo cilíndrico con la misma base y la misma altura que el cónico?

Volumen silo cilíndrico = _____ m^3

¿Por qué habrán decidido hacer silos cónicos?



El club escolar y comunitario

—Maestro, maestro, antes de empezar nuestra clase de matemáticas, me permite decir algo —casi grita uno de los alumnos del sexto año.

—Claro Roberto, dinos.

—Mire maestro, aun cuando no tenga nada que ver con matemáticas, quisiera comentar lo que platicamos varios de nosotros ayer. Ustedes siempre nos dicen lo buenas que son algunas actividades, los deportes, los experimentos, las exposiciones, las lecturas y muchas más, maestro. Bueno, pensabamos que eso está muy bien, pero es lo cosa que no es facil encontrar lugar donde hacerlas y que seria bueno tener ese lugar.

—Me parece excelente, ¿pero cómo tener ese lugar? —comento el maestro.

—Precisamente de eso queríamos platicarle, maestro, ya ve el terreno que hay enfrente de la escuela, nadie lo usa y parece que no sirve para nada, podríamos usarlo para eso, ¿no cree, maestro?

—La verdad no sé de quién sea el terreno, pero nada perderíamos con hacerle la lucha, y ¿qué pondríamos allí? —inquirió, interesado, el maestro.

—Pues mire maestro, eso ya lo pensamos, pondríamos un campo de futbol y otro de beisbol, uno de basquetbol, una alberca y un frontón, una biblioteca, un salon de exposiciones y un laboratorio y... un lugar para que jueguen los más pequeños y...

—Un momento Roberto, pára el carro. La idea me parece muy buena y vamos a pensarle todos pero

—También serviria para las gentes de por aquí, los sábados y domingos, digamos interrumpió otro de los alumnos.

—Claro, claro, pero volvamos a lo que se propone, usar el terreno de enfrente. Vamos a suponer que ya lo tenemos muchachos. Qué cosas podrían realmente ponerse en él —comento el maestro—. Ni siquiera sabemos lo que mide...

—Vamos a medirlo, Maestro, y hacemos un...

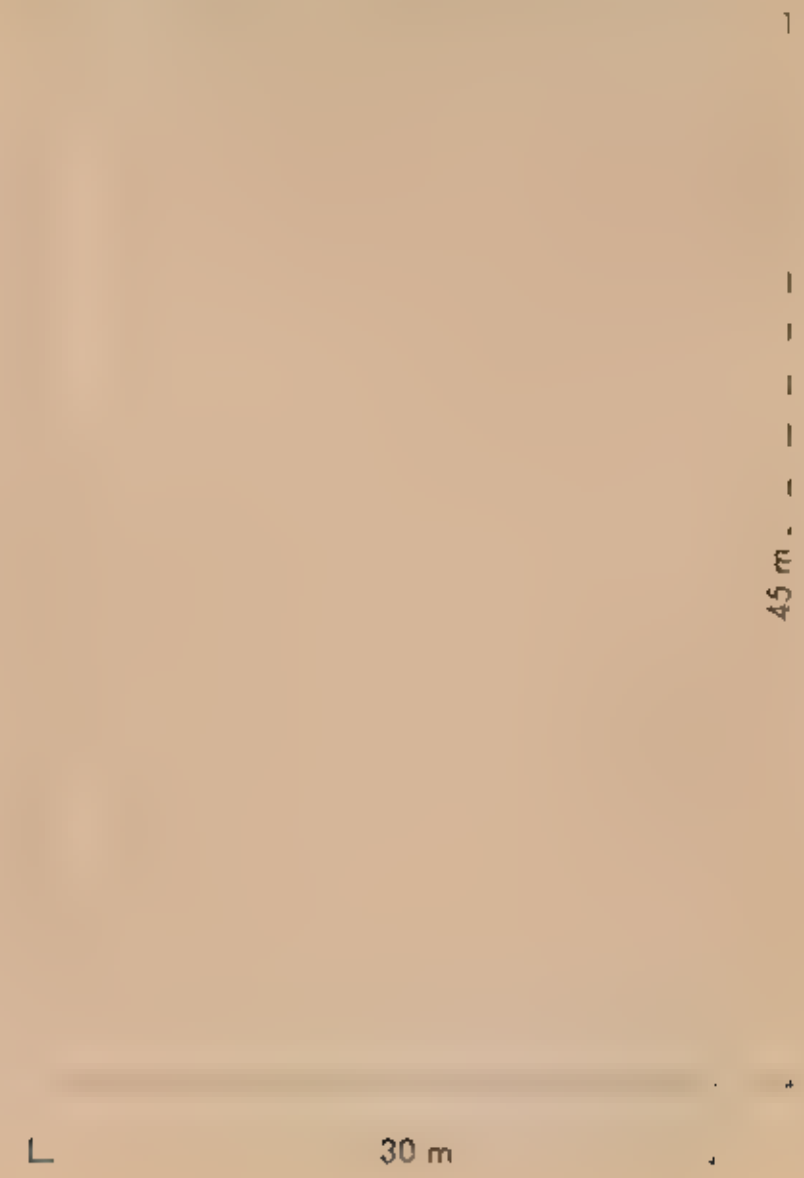
—Proyecto —completó el maestro.

—Eso mismo —dijo Roberto.

—Bien, vamos a medir el terreno y despues hacemos el proyecto, creo que mas o menos recuerdo las medidas que deben tener los campos deportivos y las otras podemos pensarlas —dijo el maestro—. Y como veremos todo esto si está muy conectado con matematicas.

El maestro y los alumnos del sexto grado, encontraron que el terreno era un rectángulo cuyos lados median 30 m y 45 m

Aquí está dibujado, a escala, un rectangulo que representa el terreno. ¿Cuantos metros cuadrados tiene el terreno?



¿Cuánto miden en cm los lados del rectangulo dibujado? Midelos con tu regla

Ancho ____ cm

Largo ____ cm

El ancho mide 10 cm pero representa a escala 30 m. ¿Cuanto representa cada centimetro? 1 cm representa ____ m

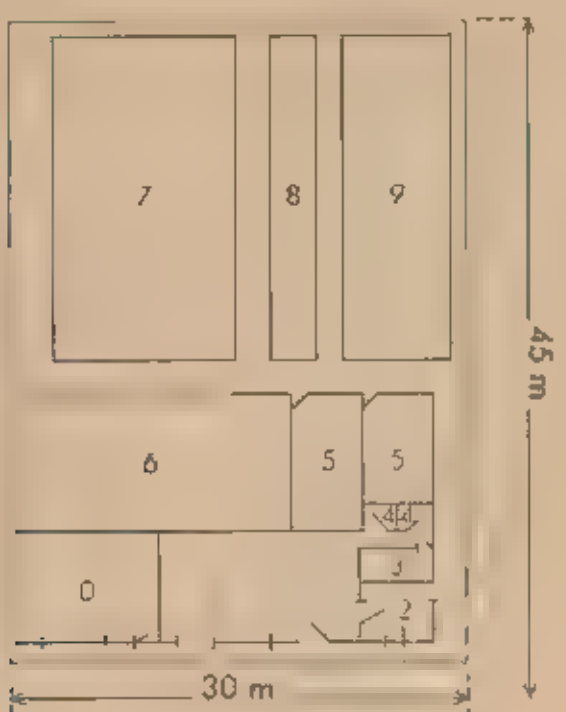
¿Cuanto es esta ultima medida en cm? ____ cm

Entonces la escala es 1 a ____

Todos los alumnos del salon pueden empezar a discutir un proyecto de Club Escolar y Comun tario que pudiera construirse en este terreno de 30 m × 45 m O bien pueden separarse en equ'pos y discutir **cada equipo un proyecto.**

Una vez que se esté de acuerdo en un proyecto habra que dibujarlo **a escala** dentro del rectangulo (de la página 127) que representa el **terreno.**

Por ejemplo, el siguiente, es uno de los proyectos que se hizo en el **salón de Roberto.**



0 = Biblioteca.
1 = Salón de uso general.
2 = Cocina-laboratorio.
3 = Bodega.
4 = Baños.
5 = Baño-vestidor-regaderas.
6 = Cancha de frontón.
7 = Cancha para basquetbol, volibol, etc.
8 = Pista de atletismo (saltos).
9 = Área de juegos infantiles.

Trabajo a realizar en el grupo

Una vez que tengan decidido un proyecto deberán

a) Investigar sobre los materiales de construcción más adecuados en su zona (deben ser fáciles de adquirir, adecuados al clima y económicos).

b) Investigar sobre los costos de construcción en relación con los materiales que van a emplearse.

c) Costo de elementos auxiliares como: ventanas, puertas, tuberías de agua, muebles de baño, tinacos, etc.

d) Costo de instalación de estos elementos.

Pueden tratar de que un maestro albañil, plomero, etc., vaya una mañana a la escuela a explicarles estas cosas.

e) Una vez que se tengan estos datos hacer un cálculo del costo total de la construcción.

f) Una vez calculado el costo investiguen las posibilidades locales de reducir el costo. Por ejemplo: obtener donaciones de material, mano de obra voluntaria, etc. ¿Cuál es el costo mínimo que pueden obtener?

¿Puede llevarse a cabo un proyecto como este cerca de tu escuela?

¿Crees que vale la pena?

¿Sugieres algún otro tipo de proyecto, por ejemplo: un dispensario médico, un comedor escolar, etc.?

La cooperativa empacadora de jitomate

Donde más jitomate se cosecha en nuestro país es en el norte, principalmente en Sinaloa y en Tamaulipas Pero también se cultiva jitomate en algunos otros estados como Morelos. El jitomate de lugares como Morelos juega un poco el papel de reserva. Por ejemplo, en algunas ocasiones en Estados Unidos pierden parte de sus cosechas y entonces compran las cosechas de Sinaloa y Tamaulipas, pagando mejores precios de los que tendría ese jitomate en Mexico. Cuando esto sucede se echa mano del jitomate de Morelos para satisfacer el mercado interior. En estos casos le va bien a los campesinos de Morelos que sembraron jitomate Pero si esto no sucede, el precio del jitomate de Morelos es tan bajo, que en ocasiones no conviene ni recogerlo.

Los campesinos de una comunidad de Morelos decidieron hacer algo para evitar estas pérdidas Despues de discutir varias posibilidades se decidieron por ver cuanto les costaría instalar una pequeña enlatadora, que manejarian entre ellos mismos.

Para enlatar un producto se necesita prepararlo, meterlo en la lata y sellar la lata al vacio, es decir, sin aire adentro para evitar que se fermente el producto. El jitomate, en particular, se fermenta muy fácilmente. Una lata abombada no debe usarse pues seguramente se fermento el contenido y esto produce el hinchamiento de la lata.

En una reunion posterior los campesinos tenían ya los datos de costo del equipo necesario.

Máquina para hacer el vacio	$ 16,000 00
Máquina selladora de latas	$ 8,000.00
Otros (estufa, caldera, embudos, etc)	$ 10,000 00
Total	**$**

También averiguaron el costo de las latas

Un millar de latas blancas con capacidad para 860 gr de puré de tomate $ 1,260.00

En esa reunion decidieron pedir un préstamo de $ 50,000.00, para pagar en 5 años, al 6% anual.

Decidieron construir entre ellos el local para poner la enlatadora.

Finalmente decidieron distribuirse equitativamente el trabajo.

En total participarían en el trabajo 50 personas.

¿Cuánto interés le pagarán al banco en los 5 años?

Si además en esos 5 años devuelven el préstamo de $ 50,000.00,

¿cuánto dinero darán en total al banco? $_____

Si lo pagan en cantidades iguales cada año, ¿cuánto pagarán cada año? $_____

Si el pago lo hacen mensual, ¿cuánto pagarán mensualmente al banco? $_____

El primer mes hicieron 9,600 latas de puré de jitomate, y las vendieron de esta manera

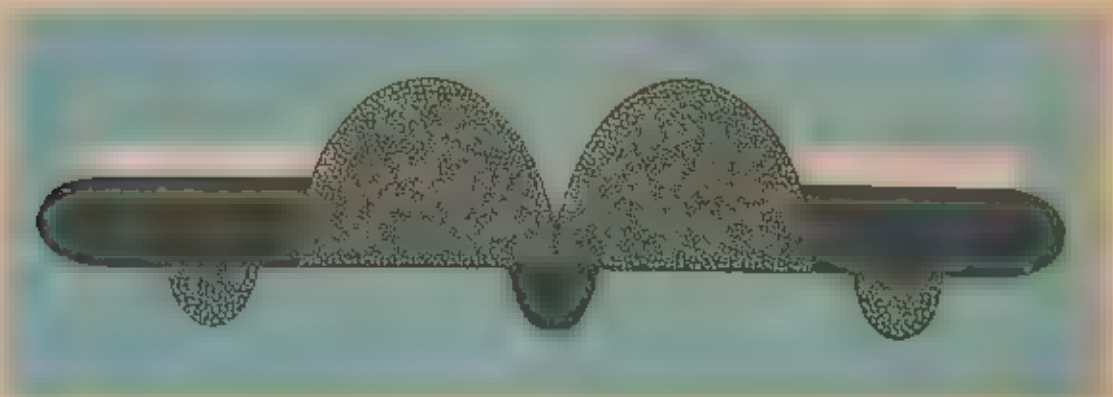
200 cajas con 24 latas, cada una, las vendieron a mayoristas al precio de $ 71.00 la caja.

¿Cuánto obtuvieron de esta venta? $_____

El resto de las latas las vendieron directamente al público, en el mercado de Cuautla a $ 4.50 cada lata.

¿Cuánto obtuvieron de esta venta? $_____

¿Cuánto obtuvieron en total de las ventas? $_____



Supongo que en el primer año de trabajo hacen 60,000 latas y las venden así:

2 000 cajas de 24 latas a los mayoristas.
El resto directamente.

¿Cuánto obtienen por la venta de las cajas? $_____

¿Cuanto obtienen por la venta directa? $ _____

¿Cuánto obtienen en total por la venta? $ _____

¿Qué harán con este dinero? Fíjate que no todo es ganancia, hay gastos que descontar, ¿cuáles? _____

_____

Hay que pagar el préstamo.

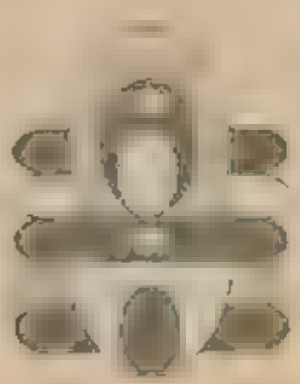
¿Cuánto puede realmente quedarles de ganancia para ellos?

_____

_____

En donde tu vives, ¿hay algún recurso que pudiese aprovecharse mejor por medio de una organización semejante?

Por ejemplo. enlatar pescado, congelar pescado, fabricar embutidos, fabricar queso, hacer conservas de fruta, enlatar chiles, fabricar jaleas y dulces, fabricar artículos de cuero, enlatar o envasar legumbres, montar un taller de carpintería, elaborar mantequilla, montar un taller de tejido, fabricar jabon, fabricar gomas de borrar, fabricar artículos decorativos aprovechando algun material barato y fácil de conseguir (papel, viruta, migajon, carton, etc.), montar un taller automotriz, montar una imprenta, en general un taller que aproveche lo que ya saben hacer algunas gentes, montar una tienda cooperativa, etcétera.



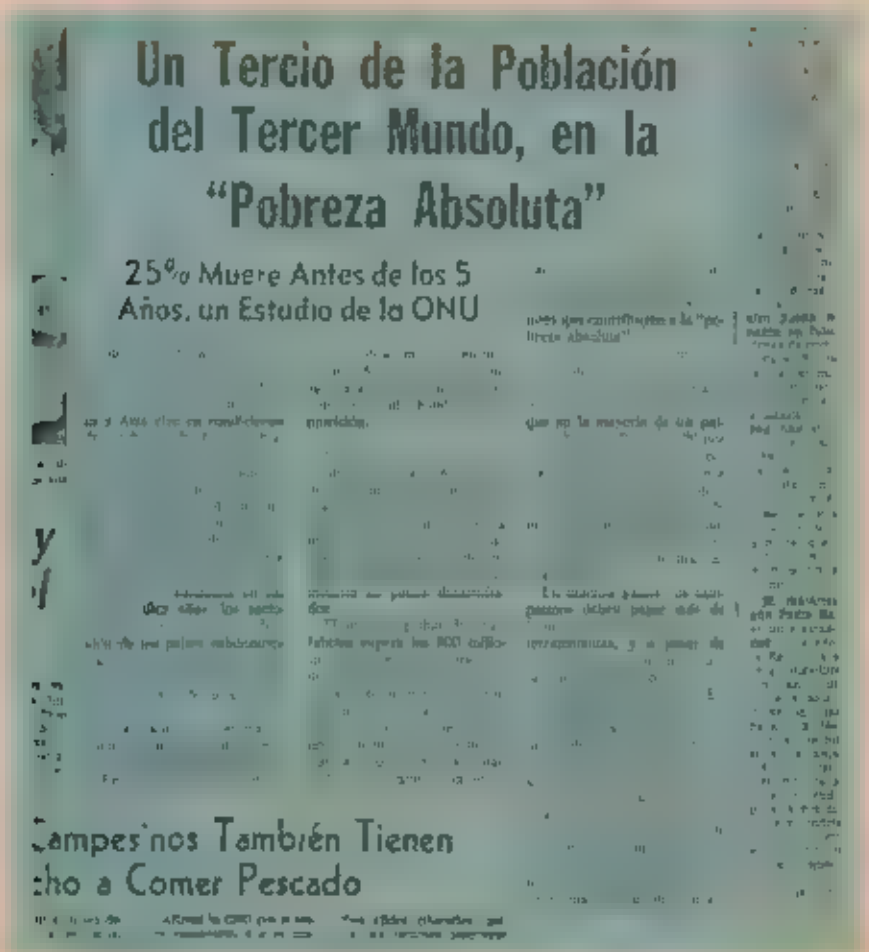
Las matemáticas y las noticias

Cuando se habla de que las Matemáticas son una ciencia que ocupamos mucho en nuestra vida diaria, nos parece una exageración, uno piensa: "yo puedo hacer muchas cosas sin que encuentre nada relacionado con las Matemáticas".

Sin embargo, basta con intentarlo para comprobar que no es así, cuando vemos la televisión, cuando jugamos, cuando leemos el periódico, cuando hacemos compras y muchas mas actividades de nuestra vida diaria, podemos hacerlas mejor, y con más provecho, si tenemos algunos conocimientos de Matemáticas, a veces aritméticos, a veces geométricos, a veces estadísticos.

Como un ejemplo de lo anterior, vamos a ver hasta qué punto un poco de Matemat cas, nos ayuda a comprender e interpretar una noticia del periódico.

Lee esta noticia



Un Tercio de la Población del Tercer Mundo, en la "Pobreza Absoluta"

25% Muere Antes de los 5 Años, un Estudio de la ONU

Campesinos También Tienen cho a Comer Pescado

Durante la lectura van apareciendo ante nosotros una serie de datos que debemos ir interpretando, para tener una idea clara de lo que ahí dice.

Hemos escrito algunas de las preguntas que tal vez te hiciste a lo largo del texto, contéstalas por escrito, si hace falta realiza algunas operaciones, consulta a tu maestro, haz lo que sea necesario

¿Qué organización da los datos que aparecen en la noticia?

_____

¿A qué se le llama Tercer Mundo?_____

¿Qué tanto es "un poco menos de la mitad"?_____

¿Qué puede comprar una familia cuyo ingreso es de $ 3 75 al día?

_____

_____

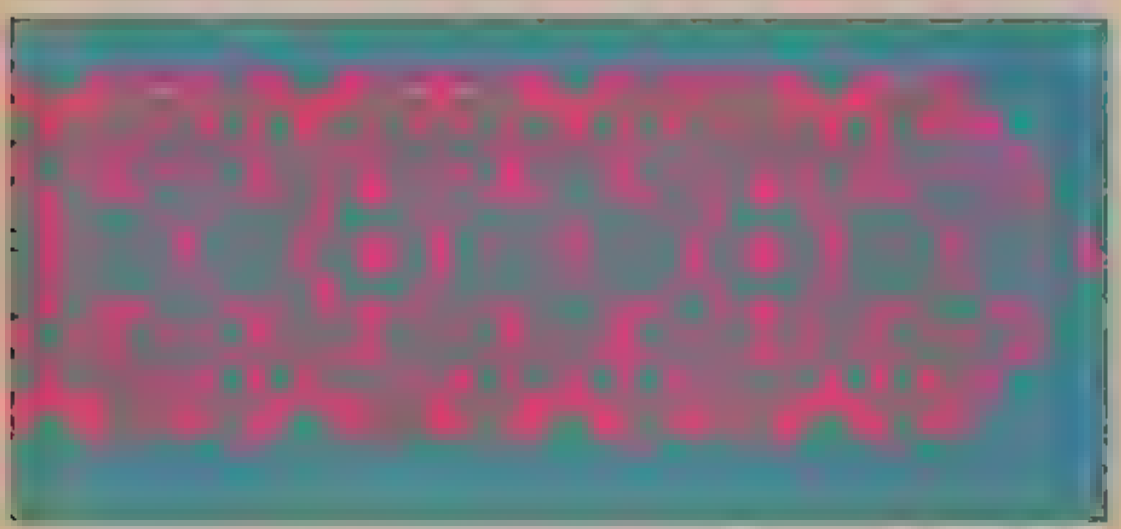
_____

¿Cuantos habitantes sufren hambre y desnutricion?, o sea ¿aproximadamente cuantos crees que son entre un tercio y la mitad de dos mil millones de personas"?_____.

Para que veas qué tan grande es este número de personas compáralo con el número de habitantes de la República Mexicana._____

¿Cuantos habitantes hay en la Republica Mexicana?_____

Entre los habitantes del llamado Tercer Mundo', de cada cuatro niños, ¿cuantos mueren antes de cumplir los 5 años?_____



¿Qué es el promedio de vida? _____

_____

¿De cuanto es ese promedio de vida en el "Tercer Mundo", si en otras partes es de 68 años? _____

¿Que parte de dos mil millones de personas es 800 millones? (los analfabetos) _____

¿Cuales crees tu que son los derechos mas elementales que se mencionan en la noticia? _____

_____

¿En manos de quienes esta la mayor parte de la tierra cultivable?

_____

¿Qué es extorsión? _____

¿Qué es erradicación? _____

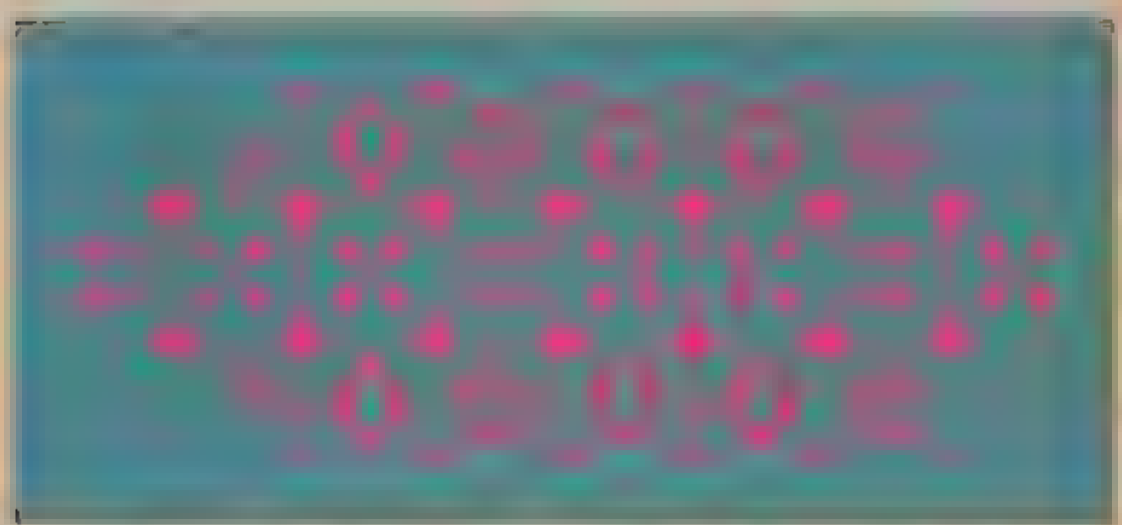
¿Crees que una persona que no sepa nada de matematicas, entiende totalmente esta noticia? _____ ¿Por qué?

_____

¿Cuál es la recomendación final que da el documento de la Comisión de Derechos del Hombre de las Naciones Unidas? _____

_____

_____



Parte II:
Compendio

Aritmética

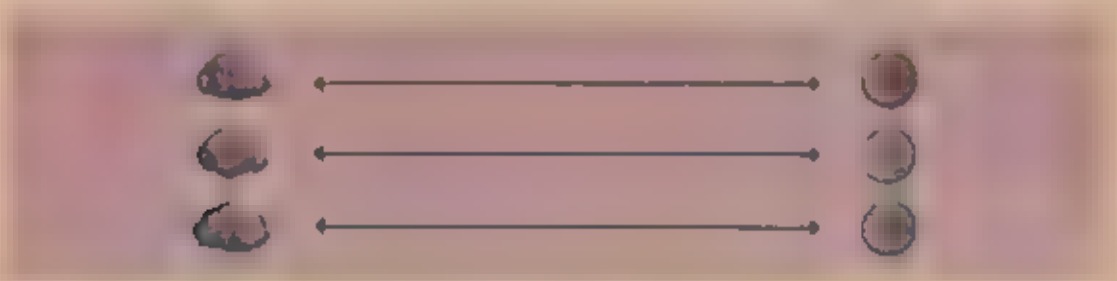
Los números enteros

A lo largo de tus años en la escuela primaria, de seguro te has familiarizado con varios tipos de *números*. Entre ellos destacan, por ser los más sencillos y por ser los primeros que conociste, los *números enteros*, o con más precisión *números enteros positivos*, pues has de recordar que también hay números *enteros negativos*, de los cuales hablaremos más adelante.

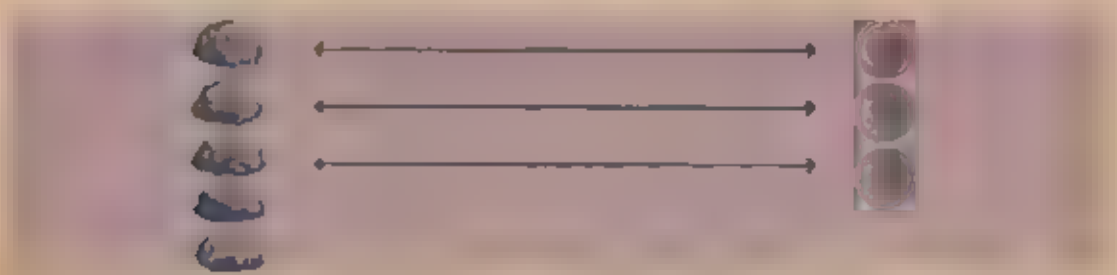
Los números enteros aparecen por la necesidad de contar la cantidad de cosas que hay en una colección. ¿Cuantas piedras tienes en tu bolsa?, ¿cuantos animales hay en el corral? son preguntas que podemos contestar, de manera que cualquiera nos entienda, por medio de los números.

Suponte por un momento que no existen los numeros que tú conoces. ¿Cómo contestarías a una pregunta como ¿cuantas piedras tienes en tu bolsa? Las contestaciones podrían ser, por ejemplo, de este tipo:

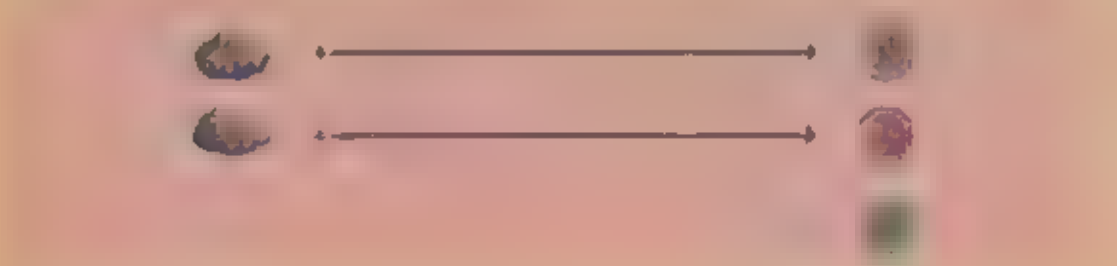
" Tengo tantas piedras como tú tienes conicas", si este fuera el caso:



o bien, " tengo más piedras que tú tienes canicas ",



o bien, " tengo menos piedras que tu tienes canicas"



Plantea con tus compañeros y con tu maestro preguntas de este tipo y traten de contestarlas sin usar números.

Como podrás ver, es una suerte que podamos disponer de los números enteros

A lo largo de la historia de la humanidad se han usado diferentes símbolos para representar números enteros. Discutan en clase algunos de los que conozcan. Actualmente y desde hace ya siglos, se usan los llamados símbolos indo-arábigos que tu conoces y que son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, y el símbolo 0 para un número muy útil, el número cero.

Notación decimal. De primera intención, si quisiéramos representar otros números mayores que 9 iríamos inventando símbolos para cada uno. Pero esto nos daría una lista interminable de símbolos, imposible de recordar y manipular.

El hombre ha creado un método que le permite, utilizando solo los símbolos dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, escribir un símbolo para cualquier otro número entero. Los símbolos dígitos juegan pues el mismo papel que el abecedario juega en el lenguaje escrito.

Este método es el de la *notación decimal*, o *notación posicional de base diez*.

Por ejemplo, si queremos decir cuántos aguacates hay en un costal podemos proceder así: con los aguacates formamos montones separados con diez aguacates en cada montón. Lo más seguro es que al terminar nos queden algunos aguacates que ya no llegan a formar un montón de diez. Supongamos que nos sobraron 6 aguacates. Ahora nos fijamos en los montones, supongamos que hay menos de diez montones, digamos que hay 5 montones. Decimos que hay 56 (cincuenta y seis) aguacates.

Supongamos ahora que sobraron los mismos 6 pero que hubiese más de diez montones ¿qué hacemos? Efectivamente, juntamos diez de estos montones en un montón grande (un montón de diez montones con diez aguacates cada uno). Supongamos que al hacer esto hubiesen sobrado 3 montones de diez aguacates ¿cómo escribes el número de aguacates que hay? Claro está que escribimos 136 (ciento treinta y seis) aguacates.

¿Has entendido la idea? Discútela con tu maestro y tus compañeros. Hagan conteos como el de los aguacates con montones que puedan manipularse en clase (palillos, piedritas, corcholatas, etc.)

Si escribimos "3 974 aguacates", esto quiere decir, 3 montones de montones de montones de aguacates, esto es 3 montones de mil aguacates cada uno, más 9 montones de montones, esto es 9 montones de cien aguacates, más 7 montones, esto es 7 montones de diez aguacates, más 4 aguacates

$$\begin{aligned} 3\,974 &= 3 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 4 \\ &= 3\,000 + 900 + 70 + 4 \end{aligned}$$

Discute el papel que juega el cero en la notación decimal.

Las operaciones

Con los números enteros, tus maestros te han enseñado cuatro **operaciones**, las llamadas operaciones fundamentales de la aritmética, y que son **sumar, restar, multiplicar y dividir.** ¿Qué son estas operaciones? En forma general, podemos decir que cada una de ellas es un método para contar. Veamos esto con algunos ejemplos, usando nuestros aguacates.

Suma. Si Juan tiene 27 aguacates y Roberto tiene 35 aguacates, ¿cuántos aguacates tienen en total? Lo que podríamos hacer es juntar los aguacates de Juan y Roberto y contarlos. Esto nos daría la respuesta pedida. En lugar de hacer esto, utilizamos un mecanismo, que es la *operación de sumar*. Sumamos los números de aguacates que tiene cada uno, y el resultado de la operación nos da la respuesta:

$$\begin{array}{r} 27 \\ +35 \\ \hline 62 \end{array}$$

En total tienen 62 aguacates.

Resta. Si Ignacio tiene 46 aguacates y regala 7 aguacates, ¿cuántos le quedan? De nuevo, podríamos tomar un montón de 46 aguacates y quitarle 7 aguacates. Si contamos los aguacates del montón que queda, tendremos la respuesta pedida. Pero de nuevo, en lugar de esto usamos un mecanismo, que es la **operación de restar**. Al número de aguacates que tenía le **restamos** los que regaló, y el resultado de la operación nos da la respuesta

$$\begin{array}{r} 46 \\ -\ 7 \\ \hline 39 \end{array}$$

Le quedan 39 aguacates.

Considera ahora esta pregunta. Si Ignacio tiene 39 aguacates y luego consigue 7 aguacates más, ¿cuántos tiene en total? Hacemos, claro está, una *suma*

$$\begin{array}{r} 39 \\ +\ 7 \\ \hline 46 \end{array}$$

Tendrá 46 aguacates. Observa la relación entre *sumar* y *restar*.

La *resta* también nos ayuda en otro tipo de situaciones, como ésta. Si Guillermo tiene 38 aguacates y quiere completar hasta 50 aguacates, ¿cuántos tiene que conseguir? Nuevamente la respuesta nos la da la *operación de restar*.

$$\begin{array}{r} 50 \\ -\ 38 \\ \hline 12 \end{array}$$

Necesita conseguir 12 aguacates.

Multiplicacion Suponte que Tomás tiene 36 montones de aguacates con 5 aguacates en cada manton. ¿Cuantos aguacates tiene en total? Correcto, aqui usaras la *multiplicación*.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 5 \\ \hline 180 \end{array}$$

Tiene en total 180 aguacates.

La respuesta también la hubieses obtenido sumando 5 + 5 + 5 + etc , 36 veces. La multiplicación es en este caso una forma de abreviar sumas repetidas

Considera ahora esta otra situación Una persona ha colocado sus aguacates en hileras Cada hilera tiene 23 aguacates y en total son 7 hileras ¿Cuántos aguacates hay?

Nuevamente obtienes la respuesta por medio de una *multiplicación*

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 7 \\ \hline 161 \end{array}$$

Tiene 161 aguacates.

Esta idea de la multiplicación es la que usas al calcular el área de figuras planas como un rectángulo.

Observa este rectángulo, dividido en cuadritos S. cada cuadrito tiene 1 cm^2, ¿cuántos cm de area tiene todo el rectangulo?

Es como el problema de la hilera de aguacates Aqui tienes 3 hileras de cuadritos, con 4 cuadritos cada una, por tanto la respuesta es 3 × 4 12 El rectangulo tiene 12 cm^2.

División Una vendedora de mercado tiene 30 aguacates y los va a poner en montones de 5 aguacates cada uno. ¿Cuántos montones puede hacer? Aquí usarías, claro está, la *división*

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 5 & 30 \\ & 0 \end{array}$$

Puede hacer, justamente, 6 montones.

Ahora bien, si puede hacer 6 montones con 5 aguacates, ¿cuántos aguacates tiene? Este problema te lo resuelve la multiplicación $6 \times 5 = 30$. Observa la relación que hay entre la multiplicación y la división.

También puedes encontrarte una pregunta de este estilo: Si tenemos en total 30 aguacates y los queremos dividir equitativamente entre 6 personas, ¿cuántos le tocan a cada una? Correcto, de nuevo usarías la *división*

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ 6 & 30 \\ & 0 \end{array}$$

Le tocarían 5 aguacates a cada una

Propiedad de las operaciones

1. En una suma no importa el orden de los sumandos.

   Ejemplo: $17 + 25 = 25 + 17 = 42$

2. En una multiplicación no importa el orden de los factores.

   Ejemplo: $37 \times 4 = 4 \times 37 = 148$

3. La suma y la resta están relacionadas; observa este ejemplo:

$$\begin{array}{r} 39 \\ -\ 6 \\ \hline 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ +\ 6 \\ \hline 39 \end{array}$$

4. La multiplicación y la división están relacionadas, observa este ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & 9 \\ 6 & 54 \\ & 0 \end{array} \longleftrightarrow 54 = 6 \times 9$$

¿Que pasa si el resto de la división no es cero, es decir, si la división no es exacta? Observa este ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 8 & 53 \\ -48 & \\ \hline 5 & \end{array} \longleftrightarrow 53 = (8 \times 6) + 5 = 48 + 5$$

5. Sumar cero a otro número no lo cambia.

   Ejemplo: $28 + 0 = 28$

6. Restar cero de un número no lo cambia

   Ejemplo: $53 - 0 = 53$

7. Multiplicar un número por uno, no lo cambia

   Ejemplo: $37 \times 1 = 37$

8. Multiplicar un número por cero da siempre como resultado cero

   Ejemplo: $42 \times 0 = 0$

9. Dividir un número por uno no lo cambia.

   Ejemplo: $23 \div 1 = 23$

10. No se puede dividir por cero. Esto es, algo como $29 \div 0$ no tiene respuesta. ¿Puedes ver por qué?

Cuando al resolver algún problema haces una pregunta como "Maestro, ¿qué operación debo hacer aquí, una división o una multiplicación?", esto quiere decir que no has entendido el problema. Vuelve a pensar y trata siempre de llegar tú solo a la decisión correcta.

Si te equivocas con frecuencia al hacer operaciones, por ejemplo, si te equivocas mucho en las divisiones, trata de concentrarte un poco más al hacerlas hasta que logres eliminar tus errores más frecuentes. El maestro o alguna otra persona pueden ayudarte haciendo operaciones contigo y corrigiendo tus errores.

Si bien es cierto que lo importante es saber las operaciones que uno debe hacer, también es conveniente no equivocarse mucho.

También es verdad que cada vez se extiende más el uso de máquinas para hacer operaciones (y que estas máquinas generalmente no se equivocan), sin embargo es conveniente tener una idea anticipada de más o menos cuál será el resultado de una operación.

Por ejemplo, si vas a realizar una operación como

$$\begin{array}{r} 2725 \\ 3207 \\ +\,5122 \\ \hline 6013 \end{array}$$

puedes anticipar, viendo solo los miliares, que el resultado será algo así como 16 ó 17 mil y pico.

Practica este tipo de cosas con tus compañeros

Las fracciones

Pero también conoces otros numeros, por ejemplo las fracciones o quebrados Estos números tambien han sido creados por necesidades muy concretas No siempre podemos contar las cosas con números enteros Por ejemplo al medir con un metro la altura de una barda nos encontramos que mide más de 2 metros, pero menos de 3 metros Mide entonces 2 metros y una fracción Puede ser que mida 2 metros y medio, o 2 metros y un tercio, o 2 metros y tres cuartos, etc.

Estos nuevos numeros, las fracciones, los escribimos usando parejas de números enteros en la forma:

$$\text{un medio} = \frac{1}{2} \qquad \text{tres cuartos} = \frac{3}{4}$$

$$\text{un tercio} = \frac{1}{3} \qquad \text{siete quintos} = \frac{7}{5}$$

Una fracción está compuesta de dos partes. Observa:

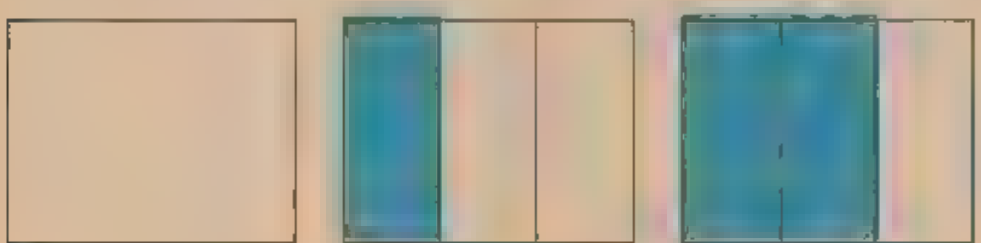
$$\text{dos tercios} = \frac{2}{3} \begin{array}{l} \leftarrow \text{numerador} \\ \leftarrow \text{denominador} \end{array}$$

¿Qué te indica el denominador? Te indica el número de partes iguales en que has dividido la unidad en consideración. Esta unidad puede ser cualquier cosa, por ejemplo, un metro, un terreno, una manzana, un montón de cacahuates, etc

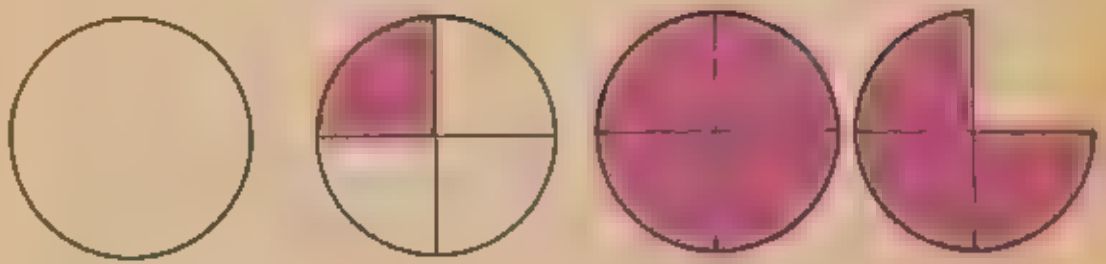
¿Que te indica el numerador? Te indica la cantidad de esas partes iguales que vas a tomar en consideración.

Por ejemplo:

Si ésta es la unidad Esto es $\frac{1}{3}$ Esto son $\frac{2}{3}$



Si ésta es la unidad Esto es $\frac{1}{4}$ Esto son $\frac{7}{4}$



Fracciones equivalentes

Observa este ejemplo:

Esto son $\frac{2}{3}$ Esto son $\frac{4}{6}$

Como ves, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ representan la *misma* fracción de la unidad. En casos como éste decimos que las fracciones son equivalentes. $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son fracciones equivalentes

Cuando dos fracciones son equivalentes, representan lo mismo y son por lo tanto iguales como números; escribimos $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Discute en clase con tus compañeros y el maestro cómo saber cuándo dos fracciones son equivalentes.

Por ejemplo:

¿son equivalentes $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$?

¿son equivalentes $\frac{7}{5}$ y $\frac{21}{15}$?

¿son equivalentes $\frac{1}{2}$ y $\frac{9}{18}$?

Aquí te ponemos una regla para saberlo:

Dos fracciones son equivalentes sólo cuando los productos cruzados (denominador de una por numerador de la otra y viceversa) de sus elementos son iguales

Ejemplo: $\frac{3}{9}$ y $\frac{1}{3}$ son equivalentes

porque $3 \times 3 = 9 \times 1$.

Ejemplo $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{8}$ no son equivalentes

porque $4 \times 8 \neq 7 \times 5$.

Deben discutir en clase por qué vale esta regla

Observa que las fracciones $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, etc. son equivalentes respectivamente a los enteros 1, 2, 3, 4, etc., ya que representan la misma fracción de la unidad.

Observa que las fracciones $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, etc son todas equivalentes a $\frac{1}{1} = 1$

Observa que las fracciones $\frac{0}{1}$, $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{3}$, etc son todas equivalentes a cero.

Observa que no tiene sentido hablar de fracciones como $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{0}$, $\frac{3}{0}$, etc

(vuelve a leer lo relativo a la división).

Por lo tanto no hay fracciones con denominador cero

Estudia las siguientes maneras de obtener fracciones equivalentes

Si tomas una fracción, digamos $\frac{3}{5}$, y multiplicas sus elementos (numerador y

denominador) por un mismo número, d'gamos 4, obtienes una fracc'ón, en este caso $\frac{12}{20}$, equivalente a la primera.

Lo mismo sucede si d v.des sus elementos por un mismo número Por ejemplo $\frac{20}{25}$ es lo mismo que $\frac{4}{5}$ ya que se obtiene dividiendo los elementos por 5

También puedes verlo de esta manera:

$$\frac{20}{25} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{4}{5}$$

Suma y resta de fracciones

Las ideas son las mismas que en la suma y resta de enteros.

Si tengo por un lado $\frac{2}{5}$ de metro de mecate y por otro tengo $\frac{1}{5}$ de metro de mecate, ¿cuanto tengo en total? Tengo, claro está, $\frac{3}{5}$ de metro de mecate

Entonces:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2 + 1}{5} = \frac{3}{5}$$

Así, si las fracciones tienen el *mismo denominador*, para sumarlas o restarlas basta sumar o restar como enteros los numeradores y dejar fijo el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{7}{16} + \frac{21}{16} = \frac{7 + 21}{16} = \frac{28}{16}$$

$$\frac{24}{5} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{24 \quad 7}{5} = \frac{17}{5}$$

¿Pero que hacer si los denominadores no son iguales?

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = ?$$

Aquí aprovechamos la idea de fracciones equivalentes. Observa cómo se desarrolla el ejemplo y saca tus conclusiones.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} + \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{18}{24} + \frac{20}{24} = \frac{38}{24}$$

Estudia este otro ejemplo:

$$\frac{7}{8} \quad \frac{3}{4} = \frac{7 \times 4}{8 \times 4} - \frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{28}{32} - \frac{24}{32} = \frac{28 - 24}{32} = \frac{4}{32}$$

Discute el proceso con tus compañeros y maestro en la clase.

Multiplicación de fracciones

Recuerda que si vemos la multiplicación como suma repetida, tendremos, por ejemplo:

$$6 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

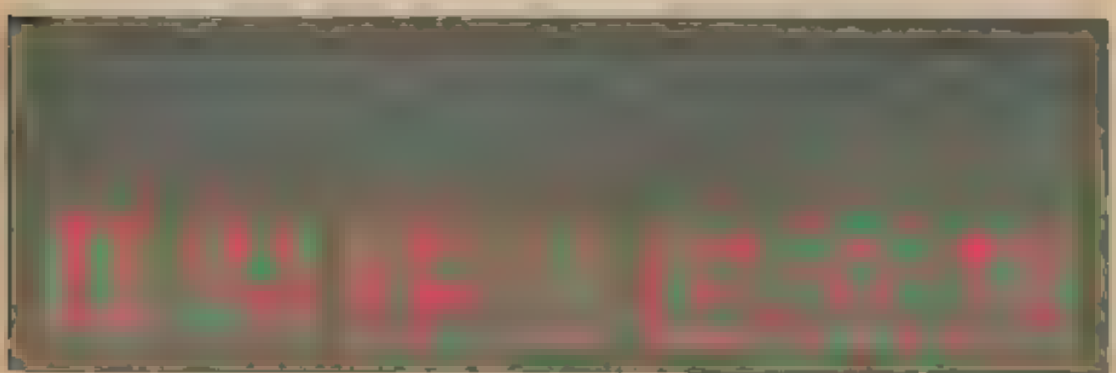
Multiplicar 6 por $\frac{1}{3}$ da lo mismo que dividir 6 entre 3

Para que recuerdes cómo se multiplica, en general, un entero por una fracción, observa estos dos casos:

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4}$$

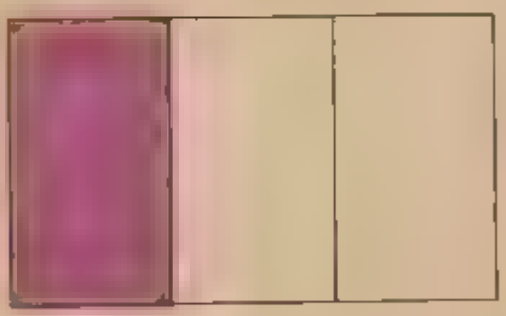
$$\frac{7}{5} \times 6 = \frac{7 \times 6}{5} = \frac{42}{5}$$

¿Cómo multiplicamos fracciones? Por ejemplo, ¿qué interpretación daremos a algo como $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$?

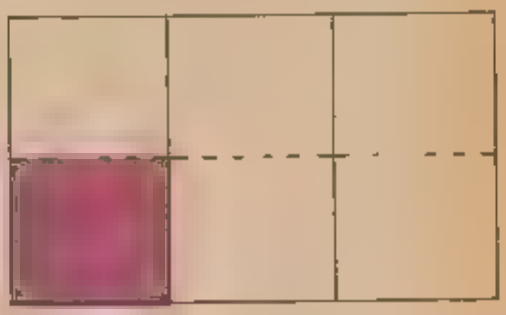


Una forma de verlo es pensar en la mitad de un tercio. En forma gráfica:

Esto es $\frac{1}{3}$



Esto es $\frac{1}{6}$, la mitad de $\frac{1}{3}$



$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

En general,

$$\frac{2}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{2 \times 6}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$$

Discutan estos procedimientos en clase.

División de fracciones

Si divides media sandía entre 2 personas, ¿cuánto le toca a cada una? Le toca un cuarto de sandía ¿verdad?

Esto es:

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$$

En general, el proceso de dividir una fracción entre un entero es como sigue.

$$\frac{4}{5} \div 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$$

Discute el procedimiento en clase.

¿Cómo divides una fracción entre otra fracción?

Estudia el ejemplo que se desarrolla a continuación y discute el procedimiento en clase:

$$\frac{7}{5} \div \frac{6}{8} = \frac{7 \times 8}{5 \times 6} = \frac{56}{30}$$

Fracciones decimales

Como para medir y contar usamos el sistema decimal resulta que las fracciones con denominador 10, 100, 1 000, etc. son muy útiles. Para estas fracciones usamos una nomenclatura especial, utilizando el punto decimal.

Así, tenemos

$$\frac{1}{10} = 0.1 = \text{un décimo}$$

$$\frac{1}{100} = 0.01 = \text{un centésimo}$$

$$\frac{1}{1000} = 0.001 = \text{un milésimo}$$

$$\frac{3}{10} = 0.3 = \text{tres décimos}$$

$$\frac{6}{100} = 0.06 = \text{seis centésimos}$$

Cuando tú escribes un número como 3.14, esto significa lo siguiente:

$$3.14 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$$

Analiza los ejemplos que se dan a continuación y discutan en clase la forma de realizar operaciones con fracciones decimales.

Suma

$$\begin{array}{r} 2.76 \\ +\ 12.25 \\ \hline 15.01 \end{array}$$

Resta

$$\begin{array}{r} 13.43 \\ -\ 7.27 \\ \hline 6.16 \end{array}$$

Multiplicación

$$\begin{array}{r} 12.37 \\ \times\ 3.4 \\ \hline 4948 \\ 3711 \\ \hline 42.058 \end{array}$$

División:

$2.5 \overline{)15.36}$ es lo mismo que

$$\begin{array}{r} 6.1 \\ 25 \overline{)153.6} \\ 36 \\ 11 \end{array}$$

Los números en la recta

Los números enteros y las fracciones podemos pensarlos colocados en una recta. Una especie de regla completa.

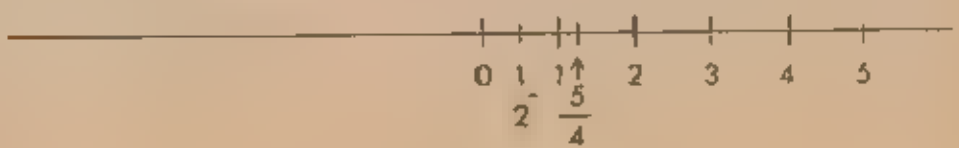
Tienes una recta:

Eliges un punto cualquiera y le asignas el cero

A partir de cero, hacia la derecha marcas una distancia elegida como unidad, allí colocas el 1:

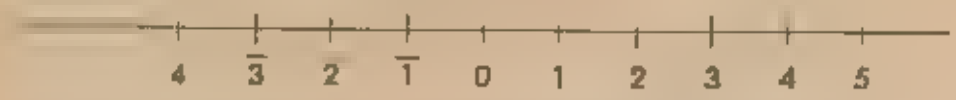
A partir del 1 sigues trasladando la unidad para marcar otros enteros, 2 3, 4, etc.

También puedes colocar en la recta las fracciones, por ejemplo:



Coloca tú otras fracciones.

Podemos colocar también números hacia la izquierda del cero; les ponemos una rayita encima para distinguirlos de los de la derecha:



A estos enteros $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, etc., los llamamos *enteros negativos*

Discute en clase casos donde se usan enteros negativos, por ejemplo

El termómetro
Años antes y después de Cristo.
Alturas sobre y bajo el nivel del mar.

Geometría

Desde la prehistoria, el hombre empieza a aprender Geometría observando el mundo que le rodea y a través de las diversas actividades que realiza todos los días. Contigo ha pasado lo mismo, desde antes de ir a la escuela, observaste las diversas formas de los objetos que te rodeaban.

Lo que después llamaste circunferencia te la encontraste en las ruedas, en las monedas, en las corcholatas y en muchos otros sitios. Otras formas, como los rectángulos, también aparecían constantemente ante tus ojos, en las puertas, en las ventanas, en la forma de las paredes, ¡en todos sitios!

Desde muy pequeño, te diste cuenta que una pelota o una rueda rodaban mejor que una caja o un ladrillo, pero estos podían acomodarse mejor unos encima de otros, por eso se acostumbra hacer las paredes con materiales que tienen la forma de los ladrillos y las llantas de los camiones y bicicletas son redondas ¡Imagínate una bicicleta con llantas cuadradas!

No todos los objetos sirven para guardar líquidos; los recipientes han de ser de una forma especial. Los objetos con una forma sirven para unas cosas y otros, con forma distinta, para otras. Para realizar la mayoría de tus actividades usas todos estos conocimientos, que fuiste adquiriendo fuera y dentro de la escuela, con tus maestros, los estudiaste en tu clase de Geometría.

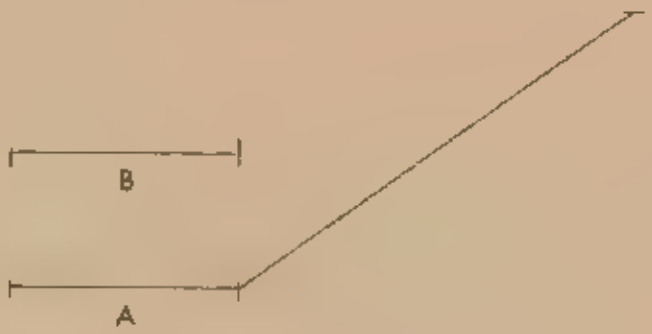
Cuando el hombre empezó a desarrollar la agricultura y, más tarde, el comercio tuvo la necesidad de no solo conocer y utilizar las formas debió entonces desarrollar algunos métodos que le permitieran comparar los tamaños de distintas cosas, así, empezó a comparar terrenos, recipientes, caminos entre pueblos, etc. Poco a poco fue desarrollando distintas maneras para medir lo que llamamos longi

tudes, areas, volumenes, y ángulos. La medición de terrenos era tan importante que el mismo nombre de la Geometría lo refleja. La palabra Geometría viene de la combinación de las palabras griegas que designaban a la tierra y a medir.

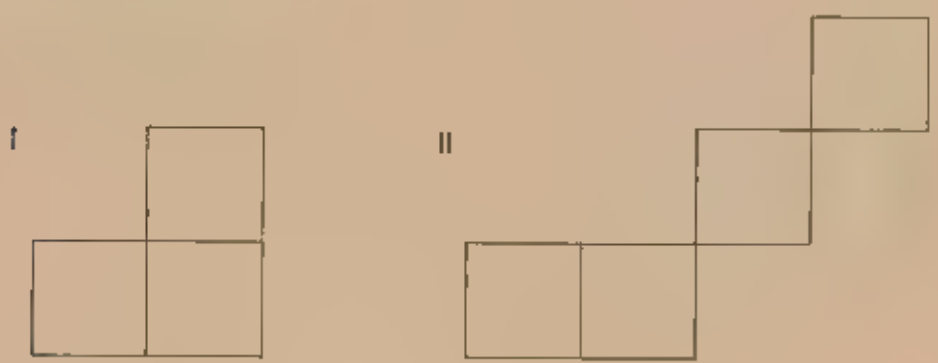
Como puedes ver, la agricultura fue una gran fuerza impulsora del desarrollo de la Geometría, así como de la aritmética, pues para medir, como tu sabes, es necesario usar los números, sumándolos, multiplicándolos, etc., es decir, es necesario utilizar la aritmética.

A veces es fácil comparar las magnitudes de dos objetos.

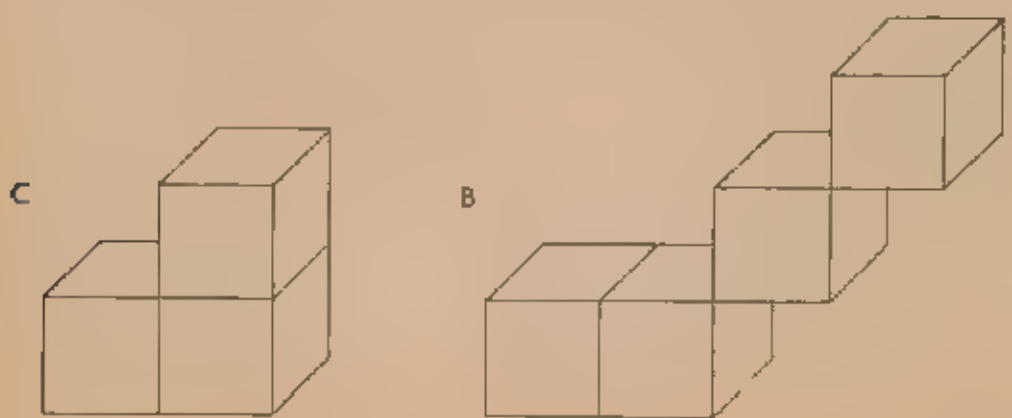
¿Cuál tiene longitud mayor, la línea quebrada A ó el segmento B?



¿Cuál tiene mayor área, I ó II?



¿Cuál tiene mayor volumen, C ó B?



Pero, otras veces, esto es difícil.

¿Cuál tiene mayor área, la región roja o la verde?

¿Te parecen raras estas regiones? Son los dibujos de los Estados de Jalisco y Tamaulipas copiados de un mapa de la República Mexicana

Para comparar los tamaños de dos regiones, se ha visto que es de gran utilidad primero comparar las ambas con otra región, escogida de antemano, a la que se le llama unidad. Las unidades mas importantes que se utilizan hoy en día, tu ya las conoces, son las del sistema metrico decimal

Lo importante de ellas es que todo el mundo las conoce y así cuando tú dices mido 1.52 lo entiende cualquier otro niño de la tierra y sabe si el mide más o menos que tu, ¡puede comparar su estatura con la tuya, sin necesidad de que tu estés presente!

Este metodo de adoptar una unidad y despues comparar cualquier magnitud con ella es lo que llamamos medir. Para medir una magnitud se escoge una unidad que haga fácil llevar a cabo la medicion. ¿Medirías tu estatura en kilómetros?, o, ¿medirías el area de un estado de la Republica en milimetros cuadrados?

La manera como se eligió el metro como unidad principal es poco importante, se eligió una comision integrada por representantes de varios paises, lo importante es que desde entonces lo han ido adoptando más y mas paises como unidad de me

dida. Se podría haber elegido otra unidad y, si todos hubieran estado de acuerdo en usarla, hubiera sido igual de útil. En los países anglosajones tradicionalmente, se han usado otras medidas, que no son las del sistema métrico decimal. La de longitud que se parece bastante al metro es la yarda (91 cm.), esta la eligió el rey Jorge como la distancia que había entre su nariz y su brazo extendido. Esto muestra cuán arbitraria puede ser la elección de una unidad, que incluso actualmente se usa en los Estados Unidos de Norteamérica e Inglaterra.

Últimas fechas, estas dos naciones están tratando de adoptar también el sistema métrico decimal como unidades oficiales de medición de longitudes, áreas y volúmenes.

La ventaja que tiene el sistema métrico decimal es que cuenta con diversas unidades, unas mayores que otras, teniéndose entonces unidades para llevar a cabo cualquier medición que se nos presente en la vida diaria; además, todas esas unidades están relacionadas entre ellas de una manera muy fácil. Tu ya sabes que:

$1\ m = 10\ dm = 100\ cm = 0.001\ km.,$

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2$

$1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$

Unas se obtienen de otras al multiplicar o dividir por algún multiplo de diez, como 10, 100, 1 000, etc., por ello se llama sistema decimal.

Dos propiedades importantes

Hay dos ideas muy simples que se utilizan constantemente para medir longitudes, áreas y volúmenes. La primera la usamos para responder preguntas como ¿para qué usarás más pintura, para pintar una sola pared de tu salón, o para pintarlo completamente?

Si hemos de llevar un cable de luz desde un extremo del salón hasta el apagador ¿cuándo usaremos mas cantidad de cable, cuando el apagador lo pongamos a mitad del salón o cuando esta hasta el otro extremo?

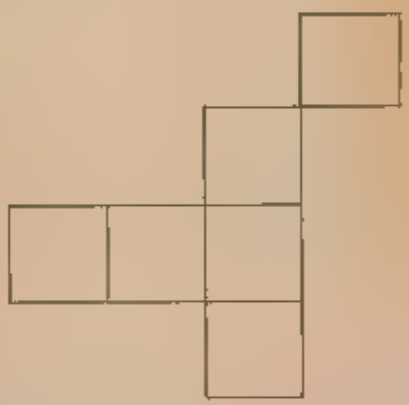
Si un vaso cabe dentro de una olla, ¿en cuál cabe mas agua, en el vaso o en la olla?

Estas preguntas, ya lo habrás notado, son muy simples. Sin embargo ilustran la idea de que si hemos de medir dos objetos y uno de ellos es igual a una parte del otro, la medida de este último será mayor que la del que es como una parte suya.

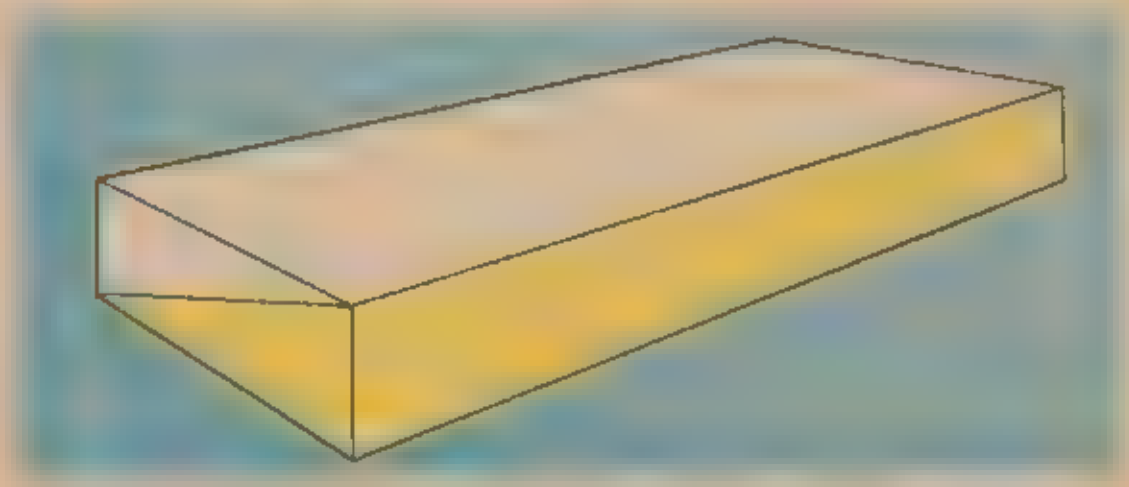
Al elegir la unidad, con la que vamos a llevar a cabo una medición, escogemos generalmente la más grande de las que son iguales a una parte del objeto que deseamos medir, y otra aun mas pequeña. Para medir el alto de este libro no escogemos el kilometro ¿verdad?, sino podemos empezar viendo que su longitud es mayor que dos decimetros y menor que tres decimetros, despues, para mejorar esta medición, utilizamos al centimetro.

La otra propiedad

Ahora, si dentro de una olla caben, sin tocarse entre sí, dos vasos, ¿en dónde cabe más agua, en los dos vasos juntos o en la olla? Si todos los cuadritos son iguales, ¿la región roja mide 3 veces lo que la azul?



¿El volumen del prisma triangular amarillo mide la mitad de lo que mide el prisma rectangular entero?



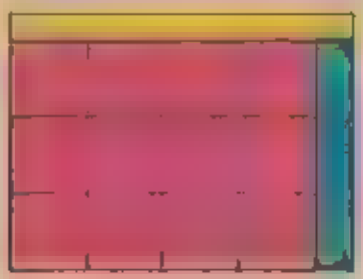
Si una cosa se puede descomponer en varias partes, sin que estas se encimen, la medida del total es igual a la suma de las medidas de todas esas partes en que hemos descompuesto al total.

En el caso de las regiones roja y azul, como cada cuadrito mide 1 cm, podemos decir que una mide 2 cm y la otra 6 cm, porque las hemos podido descomponer, la roja en dos partes y la azul en 6 partes, todas ellas iguales a 1 cm^2.

Antes dijimos que la actividad de medir utilizaba tanto conocimientos de Geometría como de Aritmética, ahora lo estás viendo, se calcula la medida total (un número de unidades) sumando las medidas de sus partes (otro número de unidades). Al mejorar nuestras mediciones, tomamos fracciones de la unidad antes utilizada

En todo ello se están haciendo operaciones aritméticas. De hecho así, al hacer mediciones, es como fueron surgiendo las fracciones y las operaciones entre ellas. Ya en el tiempo de los griegos, se conocían y operaba muy bien con las que ahora llamamos fracciones positivas.

Observa el siguiente rectángulo:



Completa:

¿Su área mide más de 12 cm^2?

¿Cuántos cuadritos de 1 cm^2 hay dentro del rectángulo? _____

¿La base mide más de 4 cm y menos de 5 cm?

¿La altura mide más de 3 cm y menos de 4 cm?

¿Cabe dentro del rectángulo un cuadrito de 1 cm que no toque a los cuadritos rojos? _____

No, ¿verdad?, sin embargo el área pintada de azul sabemos que mide

1 y $\frac{1}{2}$ cm. El área del rectángulo por tanto mide

Área roja + área azul + área amarilla

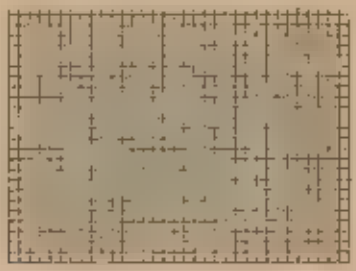
= 12 cm^2 + 1.5 cm^2 + área amarilla

El área del rectángulo mide más de 13.5 cm^2.

O sea que a pesar de que no podemos colocar un cuadrito de 1 cm sin que se encime sobre los otros, nos damos cuenta de que la diferencia entre el área del rectángulo y 12 cm^2 es mayor que 1.5 cm^2.

Si quisiéramos medir mejor el rectángulo, tendríamos que medir el área del rectángulo amarillo. Para hacerlo, tenemos que escoger una unidad menor, una que se pueda colocar dentro del rectángulo amarillo, por ejemplo un milímetro cuadrado.

Aquí dibujamos el rectangulo anterior, pero poniendole dentro cuadritos de lado un milimetro, o sea, mil metros cuadrados:



Completa.

La base mide 4.5 cm = _____ mm.

La altura mide más de 3 cm y 3 mm = _____ mm

La altura mide menos de 3 cm y 4 mm = _____ mm

¿Cuántos cuadritos de 1 mm^2 hay dentro del rectángulo?, ¿necesitas contarlos uno por uno?, o, si sabes que en la base tenemos marcados 45 mm y en la altura 33 mm ¿puedes hallar el numero de cuadritos multiplicando 33 × 45? Convencete de que así es. O sea, para medir el área cuadriculada del rectangulo en mm, sólo tenemos que medir, en milimetros la base y la altura y despues multiplicar estos dos numeros y asi encontramos el area del rectángulo cuadriculado

En este momento sabemos que el área cuadriculada mide

$$33 \times 45\ mm^2 = 1\,485\ mm^2$$

¿Cual se parece mas al rectangulo, el área cuadriculada de este dibujo, o el área roja y azul del dibujo anterior?

¿Cual se parece mas al area del rectangulo, 13 5 cm ó 1 485 mm? Evidentemente esta última

Al tomar una unidad de medición menor, hemos logrado aproximarnos más al area del rectángulo que queramos medir Si queremos mejorar ahora la medición tendremos que usar otros aparatos mejores que los que hemos usado hasta ahora Tendremos que mejorar nuestra vista utilizando una lupa o un microscopio y además debemos mejorar nuestros lápices, ya que ahora tendremos que hacer marcas que esten separadas por menos de un milimetro, y esto es difícil Afortunadamente, en la vida diaria no se necesitan hacer mediciones que sean mejores que las hechas con centimetros, en ultimo caso, hay que usar las hechas con milimetros

Nota que solo hemos usado las dos propiedades antes mencionadas para medir longitudes (los lados del cuadrado) y para medir un area (la del rectangulo),

las mismas ideas as podemos utilizar para medir volúmenes, sólo que en este caso usaríamos cubitos cuyos lados midieran, metros, centímetros o milímetros, o cualquier otra unidad del sistema métrico decimal

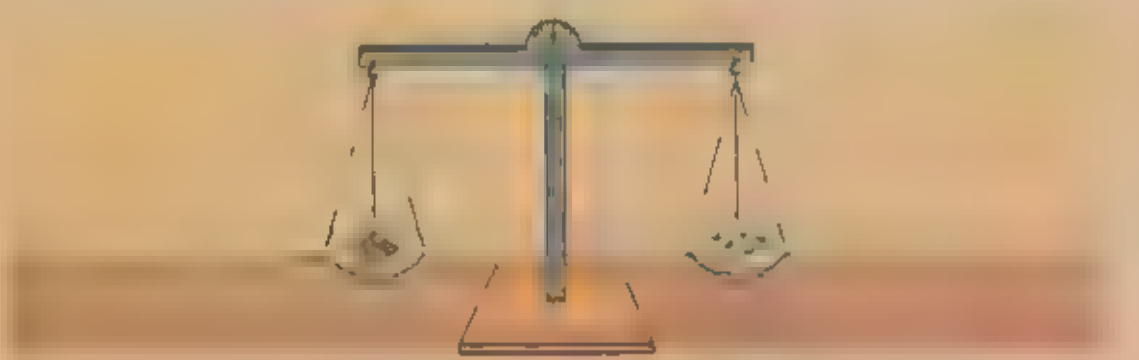
Otra cosa importante que hemos averiguado es que para medir el área de un rectangulo solo necesitamos medir la base y la altura, y después multiplicar estos dos números.

Otros métodos

Para medir longitudes, áreas y volúmenes también pueden utilizarse muchos otros metodos Ahora hablaremos de algunos de ellos, que fueron desarrollados al mismo tiempo que los metodos que antes hemos comentado, y todos ellos guardan una gran relación los unos con los otros.

Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes pesando

Si dos regiones las tienes dibujadas sobre el mismo material, como tela, cartón, metal, etc , las puedes recortar y, después, poniendo una en un plato de una balanza y la otra en el otro plato, sabrás cuál tiene mayor área con sólo ver a qué lado se inclina la balanza. Por supuesto, el material en el que esten dibujadas ambas regiones debe ser homogéneo, esto es, si recortas dos regiones iguales en sitios distintos ambas deben pesar lo mismo



Pesando, podemos no sólo comparar, sino tambien medir áreas Para ello debemos recortar cuadritos, por ejemplo, de 1 dm o 1 cm

La manera de proceder consiste en poner la región que deseamos medir en uno de los platos, y en el otro ir poniendo cuadritos hasta que la balanza se incline hacia este ultimo plato, por ejemplo, si se inclina hacia el lado de la region con tres cuadritos de 1 dm y al poner el cuarto cuadrito se inclina hacia el otro lado, sabemos que el area mide entre 3 y 4 decimetros cuadrados Si necesitamos mejorar nuestra medición, empezaremos poniendo ademas de los 3 dm , otros cuadritos de 1 cm , si podemos añadir 14 de estos sin que la balanza se incline hacia el lado

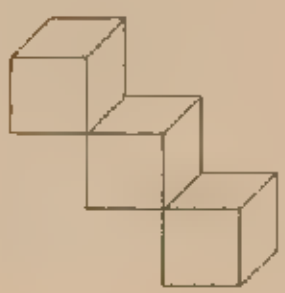
de los cuadritos y al poner el quinceavo esto sí sucede, sabemos entonces que la región mide entre 3 dm y 14 cm y 3 dm y 15 cm. Si acaso fuese necesario mejorar todavía nuestra medición, partiríamos los cuadritos de 1 cm en mitades, tercios, cuartos, etc. y procederíamos de la misma manera. ¿Por qué no construyes una balanza y mides regiones dibujadas en cartón, por ejemplo?

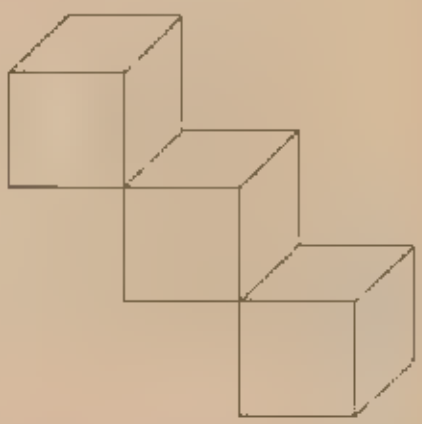
Podemos utilizar las balanzas para medir longitudes y volúmenes, se hace de la misma manera.

Corta cordones o alambres con longitudes de un metro, un decímetro y un centímetro y calcula tu estatura pesando un cordón que tenga la misma longitud. ¿Con qué sería más precisa tu medición, si utilizas alambre o si utilizas cartón? ¿Es necesario desenrollar un rollo de alambre de muchos metros para saber su longitud, si disponemos de una báscula adecuada? ¿Cómo calcularías tal longitud?

Modelos a escala

Observa las dos figuras de abajo





estas dos figuras son "iguales", excepto por la diferencia de tamaños. Muchas veces nos encontramos ante situaciones parecidas.

Una misma foto la podemos imprimir en distintos tamaños

Las cosas que aparecen en los 3 fotos son las mismas, pero los tamaños son distintos. Cuando esto pasa decimos que una de ellas es una reproducción a escala de la otra. Por ejemplo:

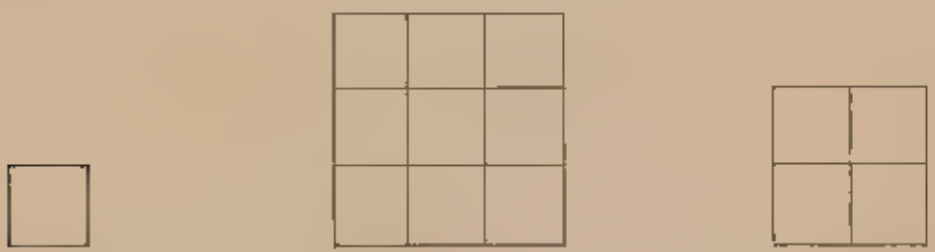
Estos dos barquitos son iguales, excepto por su tamaño. Uno es una reproducción a escala del otro.

El barquito grande es el doble de alto que el pequeño, el doble de ancho y, en general, todas las longitudes que midas en el grande serán el doble de las del pequeño. Por ejemplo, OA es el doble de largo que oa, lo mismo pasa con OB y ob, o con AC y ac, como comprueba. Decimos que el barquito grande es el doble de grande que el pequeño, o que el tamaño del pequeño es la mitad que el de grande.

Pinta tú un barquito el triple de grande que el pequeño.

Veamos ahora qué pasa con las áreas. Afirmamos que el área pintada del barquito grande es el cuádruple de la del pequeño. El área del barquito que tú pintaste no es el triple de la del pequeño, ¡es nueve veces la del pequeño!

Con los barquitos esto nos llama la atención, pero si, en lugar de los barquitos observamos estos cuadrados



no se nos hace nada raro que un cuadrado cuyo lado sea el triple de otro tenga un área nueve veces mayor, y no tres veces mayor que el área del cuadrado pequeño.

Teniendo esta observación presente, y acordándonos de cómo medimos áreas con cuadritos, es fácil darse cuenta de lo que está pasando con las áreas de los barquitos.

Completa.

El área de los cuadrados rojos del barco pequeño es _____ veces el área de los cuadritos rojos del barquito grande.

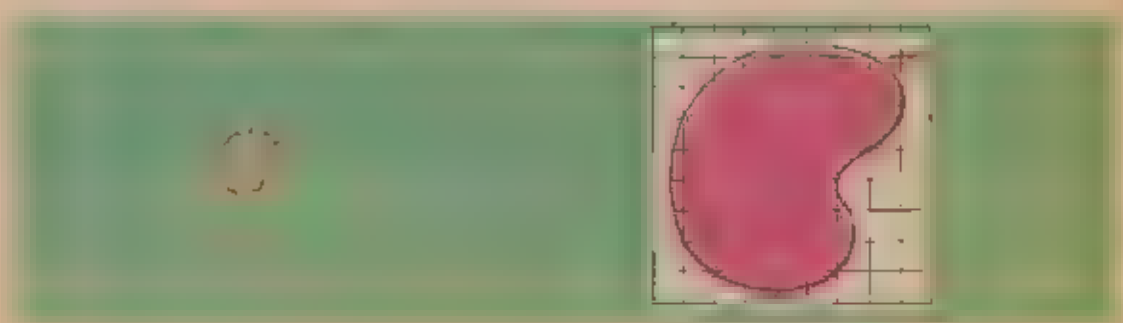
El área de los triángulos amarillos del chico es _____ veces el área de los triángulos amarillos del grande

El área del barquito grande es _____ veces la del chico

Observa ahora estas figuras, una es una reproducción a escala de la otra. Lo grande es 4 veces mayor que lo chico.

Comprueba esto último midiendo en una y otra figuras las longitudes correspondientes. Verifica, por ejemplo, que la longitud de a a b, es 4 veces la de A a B, lo mismo con cd y CD.

Ahora observa las figuras dibujadas en cuadrículas, una de las cuales tiene cuadritos de 1 mm y la otra con cuadritos con lados 4 veces mayores, esta es de 4 mm por lado.



Nosotros hemos contado los cuadritos de 1 mm que están completamente dentro de la figura amarilla hay 35 Podemos decir que 35 mm es una buena aproximación de área de la región amarilla

¿Cuántos cuadritos de 4 mm por lado de la cuadrícula grande están dentro de la región roja? ——— ¿Necesitamos contarlos? No, ¿verdad? enseguida nos damos cuenta de que hay exactamente el mismo número que los cuadritos chicos que cabían en la región amarilla, esto es así porque la cuadrícula grande se pintó de tal manera que junto con la región roja fuera una reproducción a escala 4 a 1 de la cuadrícula chica y la región amarilla.

¿Cuánto mide cada cuadrito de la cuadrícula grande? Por tanto, una buena aproximación del área de la región roja es 560 , ¡diecséis veces lo que habíamos obtenido por la región chica!

Ahora mira los cuadritos señalados con una flecha El que está en la amarilla es muy pequeño Realmente, cuando dijimos que la región amarilla medía 35 mm no importó que la porción de la región que estaba en el cuadrito señalado por la flecha no la hubiéramos tomado en cuenta, es tan pequeño que no lo ameritaba Pero, quizás en algún caso, será necesario medir mejor la región roja

Observa que el cuadrito con flecha de esa región es 4 veces mayor o sea que tiene un área 16 veces mayor que el cuadrito de la amarilla El área de la región roja dentro de ese cuadrito puede que sea grande como para dejarla sin medir, esto es sin tomarla en cuenta, como lo hicimos cuando dijimos que una buena aproximación del área de la región roja era 560 mm²

¿Has observado un reloj de pulsera por dentro? En él hay piezas muy pequeñitas que tienen que engranar unas con otras Quienes las construyen deben de tener gran cuidado para cortarlas y por tanto para medirlas Ellos no podrían permitirse el lujo de dejar de medir algo tan grande como la porción de la región roja que nosotros decidimos sin medir y, quizás también, dejar sin medir, la porción de la región amarilla que nosotros decidimos sin medir, para ellos sería imposible sus relojes serían muy inexactos sin embargo, a nosotros la medición que hicimos de la región roja nos pareció muy adecuada, tanto que la calificamos de muy buena ¿te acuerdas?

¿Crees que quienes trabajan con las piezas de un reloj lo puedan hacer con sus ojos? Por supuesto que no, en verdad, aún los relojeros que sólo han de acomodar las piezas, y no cortarlas, como los constructores usan una especie de lupa que se colocan en un ojo.

Supón que todos nos hemos puesto una de tales lupas y podemos ver los cuadritos de la región amarilla cuatro veces mayores que lo que son Así, los veremos exactamente igual que como vemos los cuadritos de la roja a simple vista, ¿o no?

Con la ayuda de la lupa y un instrumento muy afilado con el cual pintar podremos dividir los cuadritos señalados con flechas en cuadritos con lados cuatro veces menores. Se verán así.

Cara que a a amarilla estamos mirando con la lupa y a la roja a simple vista

Los lados de los cuadritos de la roja tienen una longitud igual a 4 veces la de los cuadritos que hemos dibujado en la amarilla. O sea que el área de cada uno de los cuadritos de la amarilla es 16 veces menor que el área de cada uno de los cuadritos dibujados en la roja. ¿Te das cuenta?, por cada cuadrito que metamos en la roja podemos con la ayuda de la lupa, meter un cuadrito en la amarilla, pero que tenga un área 16 veces menor. O sea que aun al hacer mas y más precisa la medición siempre tendremos que el área medida en la amarilla será 16 veces el área medida en la roja.

Lo que aquí hicimos con dos figuras una de las cuales es una reproducción a escala 4 a 1 de la otra, lo podemos hacer con otras figuras aunque la escala sea diferente. Por ejemplo, si la escala es de 100 a 1, como por cada cuadrito que metamos dentro de la grande cabra dentro de la chica un cuadrito con lados 100 veces menor, el área de la grande será 100 × 100 el área de la chica, ya que así ocurre con los cuadritos:

área del cuadrito grande = 100 × 100 veces el área del cuadrito chico.

¿Cuanto debe cobrar un pintor por pintar un espejo de agua de esta forma si

la pintura que usa en un metro cuadrado le cuesta 8 pesos y el cobra 7 pesos por metro cuadrado pintado, si, además, por uno igualito a este pero cuyas dimensiones lineales eran la mitad de las de este cobra $ 240?

¿Cuanto necesita de adelanto para comprar la pintura?

Con los volumenes de cuerpos hechos con distintas escalas pasa algo muy parecido a lo anterior:

Estos cantaritos son unos adornos de plata, no son huecos, son sólidos.

Si el cantarito B es una reproducción con el doble de tamaño que el cantarito A, su volumen no es el doble, sino 8 veces el del cantarito A, esto es así porque lo mismo pasa con el volumen del cubo 2 y del cubo 1

Volumen del cubo 2 = 8 veces el volumen del cubo 1.

Si el cantarito C es una reproducción 3 veces mayor que el cantarito A, ¿puedes contestar lo siguiente?

El volumen del cubo 3 es_____veces el volumen del cubo 1

El volumen del cantarito C es _____ veces el volumen del cantarito A.

Si no fueran sólidos, sino huecos, ¿cuántas veces mayor que la de A sería la capacidad de C?

Si una cubeta de pintura vale $ 150, ¿cuánto vale la cubeta de la misma forma y con la misma pintura, pero que tiene longitudes cuatro veces mayores que la que vale $ 150? _____

Cómo se miden volúmenes sumergiendo en agua

El agua, al igual que los demás líquidos y a diferencia de los gases, tiene un comportamiento muy interesante y a que no se suele prestar mucha atención, aunque constantemente la estamos usando. Si no cambiamos la temperatura, una misma cantidad de agua siempre ocupa el mismo volumen, independientemente de la forma del recipiente donde está guardada.

Este hecho lo usamos, por ejemplo al decir que la capacidad de un recipiente es de un litro, si la cantidad de agua que le cabe ocupa un volumen de un decímetro cúbico.

Este fenómeno junto con las propiedades del volumen que antes se mencionaron, puede ser usado para comparar y calcular volúmenes; como ilustración de ello, piensa en la siguiente situación:

Tenemos una piedra y una pieza de hierro y queremos comparar sus volúmenes, cosa que nos resulta imposible de hacer a simple vista

La balanza no puede ser usada en este caso, porque los materiales con los que están hechos estos objetos son distintos. Veamos ahora como podemos comparar sus volúmenes.

Tomemos un recipiente, por ejemplo, un bote o una cubeta, pongamos en el, primero la piedra y, después, agua hasta cubrirla, como se indica en el dibujo de abajo:

A continuacion, marcamos el nivel alcanzado por el agua, sabemos que ese nivel indica el volumen de agua mas e volumen de la piedra. Si sacamos la piedra y metemos la pieza de hierro el agua alcanzará un nivel distinto, que nos indicara e volumen de a pieza de metal más el volumen de agua S este nivel está por encima de que habiamos marcado antes, la pieza de hierro ocupa un volumen mayor que el ocupado por a piedra, si, al reves, e segundo nivel está por debajo del primero, a piedra tiene un volumen mayor

Es importante notar que para hacer la última afirmación hemos echado mano de propiedades tanto geométricas como aritmeticas

Una primera cosa es que hemos dicho que el nivel nos indica el volumen que habia de agua mas el volumen del objeto ¿Te recuerda esto la propiedad que antes discutimos de que el volumen total de un cuerpo es la suma de los volumenes de las partes en que hayamos dividido el cuerpo? Nota que lo que ahora estamos diciendo es que e volumen del recipiente, hasta donde llega el nivel del agua, es igual que la suma de los volumenes del agua que habia antes y de objeto

Vamos a ejemplificar para hacer mas claras las cosas:

1) El recipiente va a ser un cubo de 20 cm de lado

2) E agua utilizada, puesta dentro del cubo, llegaba a un nivel de 10 cm por encima del fondo del recipiente.

3) Al poner la piedra, el nivel subió 3 cm.

4) Al poner la pieza de metal, subió 3.5 cm.

Calcula:

1) E volumen que ocupa el agua sin ningun objeto dentro

2) El volumen que ocupa el agua y la piedra.

3) El volumen que ocupa el agua y a pieza de metal

¿Cual tiene mayor volumen, la pieza o la piedra?

¿Necesitabas haber hecho los tres calculos anteriores para responder a pregunta anterior?

La respuesta a esta última pregunta es no, ya que al observar que

Volumen del agua + volumen de la piedra

es menor que

Volumen del agua + volumen de la pieza de metal

Concluimos usando una propiedad de todos conocida sobre las desigualdades entre números, que

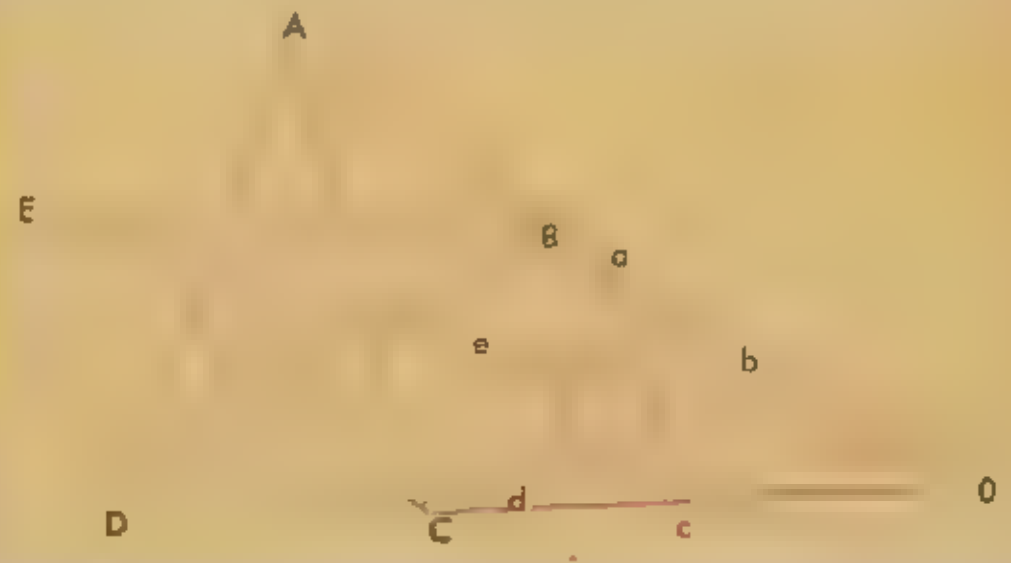
Volumen de la piedra < Volumen de la pieza.

El mismo e emplo nos ha puesto de manifiesto que no sólo podemos comparar volumenes sumergiendo objetos en agua, sino que tambien podemos calcular sus volúmenes así tú puedes responder, en base a los cálculos antes hechos que:

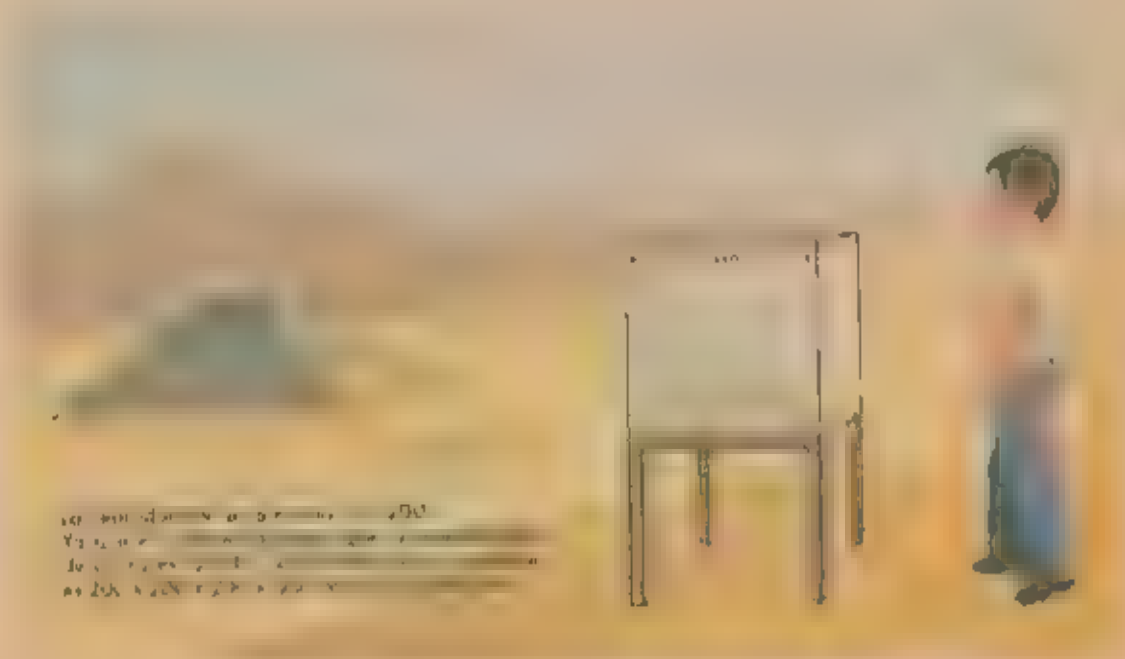
El volumen de la piedra es igual a _____ cm

El volumen de la pieza de metal es igual a _____ cm

Vamos ahora a plantearnos un problema. Calculemos el volumen de esta pirámide que se parece a la del Sol en Teotihuacan.



Pesar la pirámide es a todas luces absurdo y lo mismo pasa con la idea de sumergirla en agua. Pero si hacemos una reproducción a escala de un tamaño conveniente, para poder pesarla o sumergirla en agua, calculando así el volumen de la reproducción y después aplicamos lo que hemos aprendido acerca de reproducciones a escala, tendremos resuelto nuestro problema.



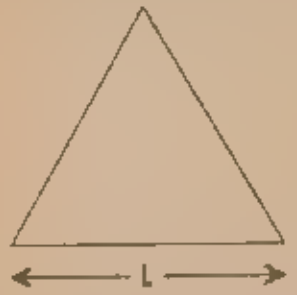
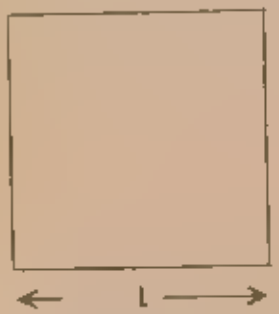
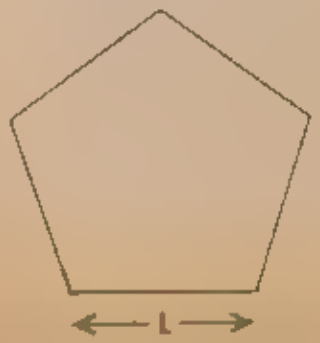
Las fórmulas Como ya te has dado cuenta hay algunas formas de figuras y cuerpos que, además de ser muy simples, se repiten constantemente Por ello es conveniente tener procedimientos que nos permitan calcular fácil y rápidamente las longitudes, áreas o volúmenes de tales formas

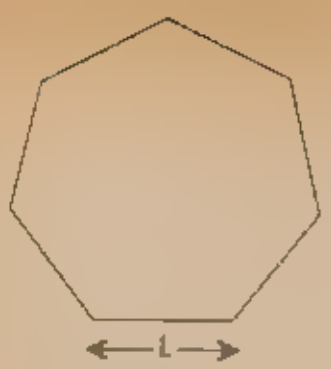
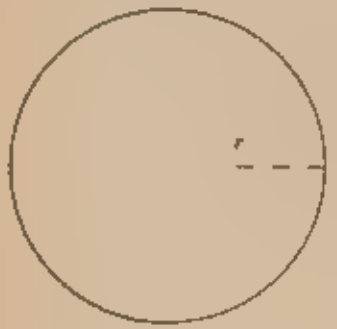
La mayoría de las veces estos procedimientos están expresados como *fórmulas* Tú ya conoces muchos de estas fórmulas pues las empezaste a estudiar desde hace algunos años y ahora en este libro, en las páginas 64, 65, 66 y 67, has visto cómo se pueden obtener algunas de ellas.

Las fórmulas son realmente muy cómodas, pues conociendo la forma y las dimensiones de algunos de sus elementos, después de realizar unas cuantas operaciones aritméticas conocemos la longitud, área o volumen que buscamos

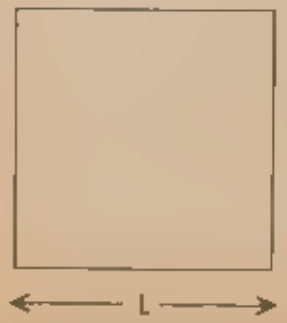
A continuación aparece un formulario que estamos seguros le será de utilidad

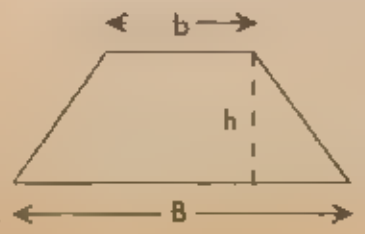
PERIMETROS

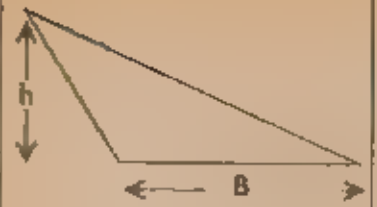
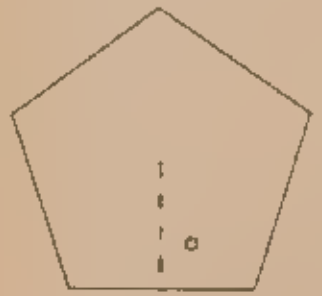
Figura	Nombre	Fórmula	Ejemplos
	Triángulo equilátero	Perímetro = 3 × L	L = 2m Perímetro = 3 × 2 = 6m
	Cuadrado	Perímetro = 4 × L	L = 3m Perímetro = 4 × 3 = 12m
	Pentágono regular	Perímetro = 5 × L	L = 35 cm Perímetro = 5 × 35 = 175 cm.

	Polígono no regular de h lados, y lado de longitud L.	Perímetro = 7 × L	L = 5 cm. h = 7 Perímetro = 7 × 5 = 35 cm.
	Círculo	Perímetro 2π × r (*)π = 3.14	r = 3 dm Perímetro = 18 84 dm

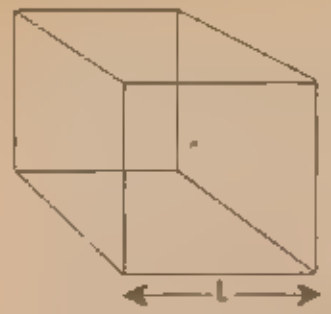
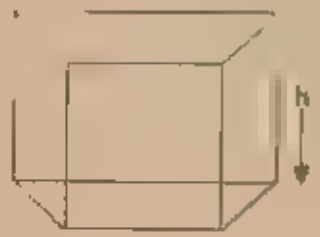
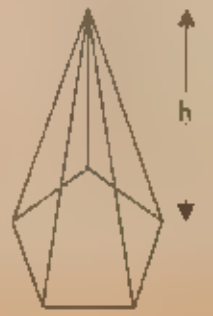
AREAS

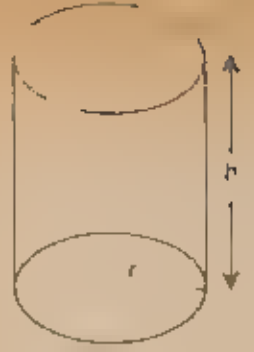
	Cuadrado	Área = L × L	L = 13 cm Área = 13 × 13 = 169 cm²

	Rectángulo	Área = L × l	L = 13 cm l = 9 cm Area = 13 × 9 = 117 cm²
	Romboide	Area = h × b	h = 8 m b = 11 m Área = 8 × 11 = 88 m²
	Trapecio	Area = $\frac{(b + B)}{2} \times h$	b = 6 m B = 8 m h = 3 m Área = $\frac{6 + 8}{2} \times 3 = 7 \times 3 = 21$ m

	Triángulo	Área $= \frac{B \times h}{2}$	b = 16 dm h = 8 dm Área $= \frac{16 \times 8}{2} = 64$ dm²
	Polígono regular de h lados	Área $= \frac{\text{perímetro} \times a}{2}$	Perímetro 16 cm a = 8 cm Área $\frac{16 \times 8}{2} = 64$ cm²
	Circunferencia	Área = π × r × r	r = 1 cm Área = 3.14 × 7 × 7 = 12 56 cm²

VOLUMENES

	Cubo	Volumen = $l \times l \times l$	l = 5 dm. Vol. = $5 \times 5 \times 5 = 125$ dm
	Prisma	Volumen = Area de la base $\times$ h	Area base = 16 cm² h = 5 cm Vol. = $16 \times 5 = 80$ cm³
	Piramide	Volumen = $\frac{\text{Area de la base} \times h}{3}$	Area de la base = 11 dm² h = 9 dm Vol. = $\frac{11 \times 9}{3} = 33$ dm³

	Cilindro	Volumen = $\pi \times r \times r \times h$	$r = 2$ m $h = 4$ m Vol $= 3.14 \times 2 \times 2 \times 4 = 50.24$ m³
	Cono	Volumen = $\frac{\pi \times r \times r \times h}{3}$	$r = 7$ $h = 3$ Vol $= \frac{3.14 \times 7 \times 7 \times 3}{3} = 46.158$
	Esfera	Volumen = $\frac{4}{3} \times \pi \times r \times r \times r$	$r = 3$ m³ Vol. = $4 \times 3.14 \times 3 \times 3 \times 3 = 113.04$ m³

Probabilidad y estadística

1. El azar

En la ciencia, llamamos *fenómeno* a cualquier cosa que observamos suceder. Percibimos en la naturaleza muchos fenómenos, sale el sol, llueve, tiembla la tierra, ladra un perro; y también hay fenómenos en los que el hombre toma parte: llega el camión o la parada, echo un volado, alguien compra un refresco.

De algunas cosas estamos seguros y hay cosas sobre las que no tenemos seguridad. Podemos asegurar que mañana saldrá el sol, que si metemos la mano en el fuego se nos quemará, que no podemos volar, que si echamos una canica al agua se hundirá. Hemos adquirido la seguridad por medio de nuestra experiencia, y tan seguros estamos de estas cosas, que ni siquiera pensamos en hacer algún experimento para comprobar que son ciertas. Pero no podemos asegurar que mañana llovera, o que habra un terremoto, o la hora cuando llegará el camión a la parada, o cuántas veces ladrará nuestro perro en un dia, o que caera cuando lanzamos un volado, águila o sol.

Queremos hacer una distinción entre dos tipos de fenómenos. Para esto, lo que nos interesa son los resultados que pueden tener los fenómenos. El estado meteorológico puede tener como resultados posteriores que haya sol, que esté nublado, que llueva, lanzar un volado puede resultar en águila o sol, meter la mano en el fuego tiene como resultado seguro que se quemará. A veces podemos asegurar algunas cosas y otras no; cuando lanzo un volado, puedo asegurar que la moneda va a caer, pero tengo duda de que caiga agu a, puedo estar seguro de que el camión llegara a la parada, pero tengo incertidumbre acerca del momento en que lo hará.

Con esto te puedes dar cuenta de que, según el tipo de resultados que nos interese observar, podemos distinguir dos clases de fenómenos: los fenómenos de los que tenemos *seguridad* del resultado que tendran y los fenómenos sobre cuyos resultados tenemos *duda* o *incertidumbre*. Con los primeros fenómenos, ni siquiera nos hace falta hacer algún experimento para comprobar el resultado, en el caso de los segundos, sólo provocando el fenómeno, o esperando a que éste ocurra, podemos saber el resultado. Cuando tenemos duda sobre cual será el resultado de un fenomeno, decimos que es un *fenómeno de azar*: si estamos seguros de lo que va a ocurrir, entonces el fenómeno no es de azar. La palabra *azar* significa que *no hay seguridad o certeza*. Cuando hay certeza sobre el resultado de un fenomeno, o sea que no hay azar, decimos que el fenomeno es *determinista*, porque su resultado está completamente determinado.

Supongamos que al echar un volado nos interesa observar si la moneda cae o se queda en el aire; entonces el fenómeno es determinista porque estamos seguros de que la moneda caerá, pero si lo que deseamos observar es qué cae, aguila o

sol entonces el fenomeno es de azar porque no podemos saber cuá de las dos será el resultado.

Muchas veces e hombre efectua o provoca algún fenómeno de azar, quizás para decidir algo de acuerdo con el resultado Dos amigos echan un volado para decidir quien de los dos, según que caiga águila o sol, se quedara una canica que encontraron Un fabricante de calzado mide el pie a unas cuantas personas de una población para decidir de qué tamaños hacer zapatos para toda la población ¿porque crees que hay azar en esto?) Cuando alguien realiza un fenómeno de azar, decimos que hace un *experimento de azar* A veces decimos *juego de azar*, si se trata de algún juego en el que hay incertidumbre, seguramente tú has visto juegos así con barajas, o dados; en las ferias y kermesses hay muchas diversiones que son juegos de azar; el juego de los náufragos que hiciste en tus libros de Matemáticas anteriores es tambien juego de azar Algunas personas mayores creen que los juegos de azar consisten sólo en apostar dinero, pero una cosa es el azar y otra cosa es que a alguien le gusten las apuestas

Un *experimento de azar* tiene *varios resultados posibles* (si sólo tuviera un resultado que pudiera ocurrir, entonces sería determinista) Un volado tiene los resultados posibles aguila y sol, pero aunque sean posibles, ninguno es seguro, hay azar Tambien es posible que sucedan otras cosas, como que la moneda se vaya rodando, caiga en una alcantarilla y no la volvamos a encontrar pero un resultado así no lo tomamos en cuenta como resultado posible, sólo nos interesan los resultados mas naturales, porque lo que queremos hacer es un *modelo matematico* de los fenomenos de azar, y en un modelo matemático hay que representar únicamente las cosas más importantes para que no sea muy complicado. Al estudiar un fenómeno de azar, debemos tener presentes *todos* sus resultados posibles Si alguien entra en una tienda a comprar un refresco y nos interesa observar el sabor que pedira, esto es un experimento de azar porque no sabemos qué sabor va a pedir; los resultados posibles son los distintos sabores de los refrescos que hay

¿Por qué nos interesa estudiar el azar? y ¿por qué lo estudiamos en Matemáticas? Conocer el azar nos interesa porque muchas cosas que confrontamos en la vida son fenomenos de azar A veces tenemos que tomar una decision cuyo éxito o fracaso depende del resultado de un fenomeno de azar, pero tenemos que tomarla antes de conocer ese resultado Todos estamos acostumbrados a hacer esto, aunque no hayamos pensado en ello Por ejemplo, en muchos juegos de pelota, como el futbol, no siempre nos quedamos parados hasta ver por dónde se va la bola Cuando varios jugadores están disputandosela, no estamos seguros del curso que tomará el balón, y sin embargo, muchas veces corremos en la dirección que creemos que este va a seguir A hacer esto lo que estamos haciendo es decidir una accion que pensamos sea la más conveniente, nos podemos equivocar, porque en este juego hay azar, pero en gran parte el interes del juego consiste en desarrollar la habilidad para tratar con el azar lo mejor que podamos.

Para contestar porqué estudiamos el azar en Matemáticas, veamos un ejemplo Cuando alguien le compra una paleta a un vendedor de paletas heladas, el ven

dedor no sabe qué sabor le van a pedir, es un fenómeno de azar Pero el vende dor sí sabe, por su experiencia, cosas como ésta: es *más probable* que le pidan una paleta de limón que una de grosella Saber esto es importante para el vende dor de paletas heladas, porque él tiene que dec dir cuántas paletas de cada sabor va a llevar en su carrito; si llevase igual número de paletas de limón que de grose lla, podría ser que le quedasen pa etas de grosella sin vender, o que no vendiera muchas paletas de limón que podría haber vendido si hubiese llevado más; en ambos casos sería un mal negocio. Lo que más le conviene al paletero, para ha cerle frente al azar, es llevar determinado número de paletas de cada sabor de acuerdo con la *probabilidad* de que le pidan cada uno de los sabores ¿Qué es una probabilidad? y ¿cómo se encuentra la probabilidad?, estas preguntas y sus respuestas son parte de la Matemática como verás más adelante

2. La probabilidad

El vendedor de paletas heladas sabe que es *más probable* que le pidan una paleta de limón que una de grosella ¿Qué significa "*mas probable*"? El vendedor no está seguro ni de que le pidan limón, ni de que le pidan grosella, pero su incertidumbre, o falta de seguridad, no es igual en los dos casos porque sabe que, casi siempre, los que piden limón son más que los que piden grosella, por lo tanto el tiene *mayor* inseguridad o duda de que le pidan grosella que limon También sabe el paletero, por su experiencia, que generalmente el número de personas que piden helado de grosella y el número de las que piden helado de mandarina son casi iguales; por ello, él tiene *igual* inseguridad de que le pidan grosella que mandarina.

Como vemos en este ejemplo, en un fenómeno de azar algunos resultados pueden parecernos más inseguros que otros y algunos resultados, igual de inseguros que otros Esto nos lleva a pensar que la inseguridad, duda o incertidumbre que tenemos acerca de los distintos resultados de un fenómeno de azar, se puede expresar por medio de un *número* que nos indique qué tanto inseguridad tenemos sobre ellos, a este número lo llamaremos *probabilidad* Más adelante veremos que las probabilidades son números que siempre están entre 0 y 1 y que las cosas más in seguras tienen probabilidades pequeñas (cerca de 0) y las cosas sobre las que hay menor duda tienen probabilidades grandes (cerca de 1).

En el caso de nuestro paletero, podemos decir que la probabilidad de que le pidan limón es *mayor* que la probabilidad de que le pidan grosella, o, como dijimos antes, es más probable que le pidan limón que grosella Y también que la probabilidad de que le pidan grosella es *igual* a la probabilidad de que le pidan mandarina, o dicho de otra manera, es *igualmente probable* que le pidan grosella que mandarina.

Supongamos que nuestro paletero experimentado tiene un amigo que apenas empieza como vendedor de paletas helados, y, aconsejándole, le dice que es más probable que le pidan limón que grosella, y que es igualmente probable que le

pidan grosella que mandarina. Entonces el nuevo vendedor, sin necesidad de tener experiencia propia, entenderá que le conviene llevar más paletas de limón que de grosella, e igual número de grosella que de mandarina.

Así pues, la probabilidad es un número que indica qué tanto creemos que va a ocurrir cada resultado de un fenómeno de azar, y nos puede servir para tomar algunas decisiones, como lo hacen los paleteros.

3. La regularidad estadística

¿Cómo llegó a saber el paletero que es más probable que le pidan limón que grosella, e igualmente probable que le pidan grosella que mandarina? Simplemente porque ha notado, a lo largo de su vida de paletero, que, casi siempre, más gente pide limón que grosella, y el número de los que piden grosella es aproximadamente igual al de los que piden mandarina.

Pero supongamos que nuestro paletero ya estudió probabilidad y estadística en la Primaria, e hizo lo siguiente. Primero observó que cuando alguien le pide una de sus paletas de limón, grosella o mandarina, lo que está presenciando es un experimento de azar que tiene como resultados posibles limón, grosella y mandarina. Entonces, a partir de un cierto día, comenzó a llevar un *registro estadístico* del número de personas que le pedían paletas de cada sabor:

	día 1	total	día 2	total	día 3	total	
limón	𝍸𝍸 ||||	18	𝍸 ||||	11	𝍸 ||||	16	
grosella	𝍸 |	6	𝍸	10		4	etc.
mandarina	𝍸 ||||	9	||||	7	𝍸 ||||	8	
	suma	33	suma	28	suma	28	

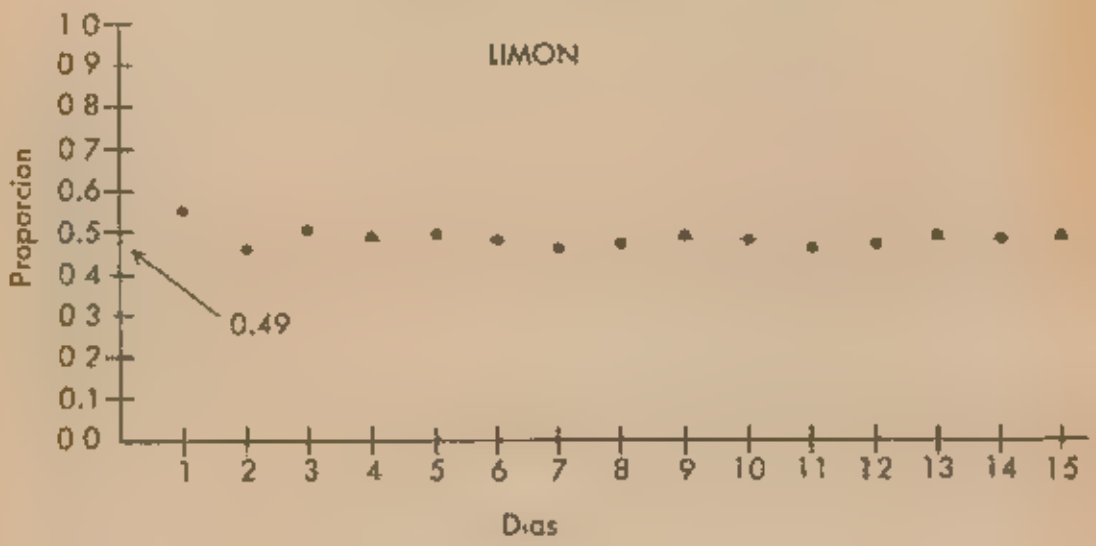
Con este registro, hizo una tabla en la que escribió los totales de cada sabor y las sumas de los totales de todos los sabores, *desde el primer día*. Por ejemplo, los totales de limón en los tres primeros días fueron 18, 18 + 11 = 29 y 18 + 11 + 16 = 45, y las sumas de los totales de todos los sabores fueron 33, 33 + 28 = 61 y 33 + 28 + 28 = 89.

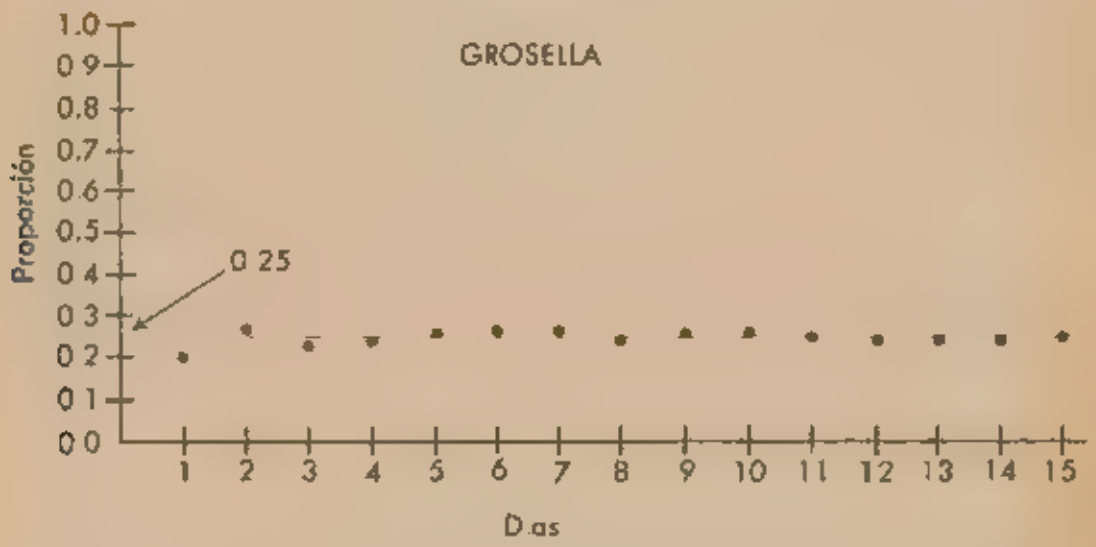
Totales desde el primer día

	día 1	día 2	día 3	
limón	18	29	45	
grosella	6	16	20	etc.
mandarina	9	16	24	
suma	33	61	89	

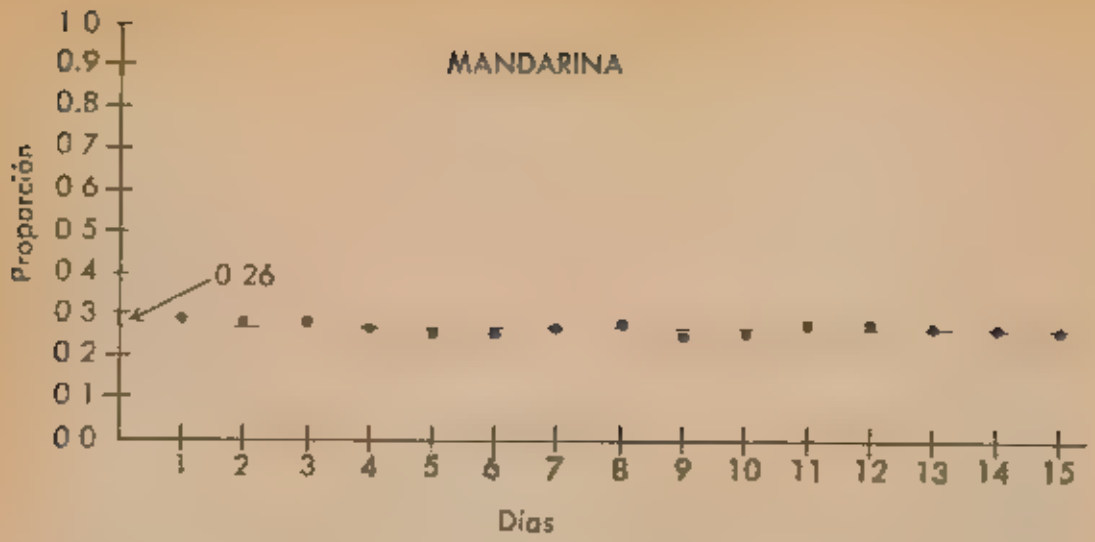
Luego calculó, con los valores de esta tabla, la *proporcion** de pedidos de cada sabor, *desde el primer dia* Asi, para el limón las proporciones de los tres primeros días fueron (redondeando a centésimos) $\frac{18}{33} = 0.55$, $\frac{29}{61} = 0.48$ y $\frac{45}{89} = 0.51$.

Para apreciar mejor si habia alguna relacion entre estas proporciones, las representó en unas gráficas:





*En este caso, la palabra *proporción* significa lo mismo que *fracción* Por ejemplo, si en un salón hay 17 niños y 23 niñas, la proporción de niños en el salón es $\frac{17}{17 + 23} = \frac{17}{40}$ Esta proporc ón tambien se puede expresar en porciento. ya que $\frac{17}{40} = 0\,425$, la proporción de niños en el salón es 42 5%



Entonces observó una cosa curiosa al progresar los días, los puntos que indican las proporciones de cada sabor tendían a acercarse a rectas horizontales, dibujó estas rectas (con rojo) para ver a qué proporciones correspondían en el eje vertical, y así encontró que eran, aproximadamente, 0 49 para el limón, 0 25 para la grosella y 0.26 para la mandarina.

Con sus gráficas, nuestro paletero confirmó una ley de la naturaleza, a la que denominamos *regularidad estadística*. Esta ley consiste en que, *al efectuar un experimento de azar un gran número de veces, siempre en las mismas condiciones, sucede que las proporciones de veces que ocurre un resultado del experimento tienden a estabilizarse en un cierto valor, es decir, a medida que se aumenta el número de repeticiones del experimento, las proporciones tienden a permanecer cada vez más cerca de una recta horizontal*. Llamamos "regularidad estadística" a esta ley porque los datos estadísticos, a pesar de que provienen de un fenómeno de azar, no ocurren en completo desorden, sino que se ajustan a un cierto orden o regularidad.

Hemos visto que las proporciones de veces que ocurre un determinado resultado de un fenómeno de azar se van concentrando alrededor de una recta horizontal. A la proporción que corresponde a esa recta horizontal, en el eje vertical, la llamamos la *probabilidad* de dicho resultado. Así, en el caso de las paletas, la probabilidad de que alguien pida una paleta de limón es 0.49, la probabilidad de grosella es 0 25 y la de mandarina, 0 26 (como los dos últimos valores son casi iguales, el paletero puede decir, hablando en términos generales, que grosella y mandarina son igualmente probables).

Fíjate que las proporciones siempre están entre 0 y 1 porque son fracciones cuyo numerador no es mayor que el denominador, y en consecuencia, por la regularidad estadística, la probabilidad también estará entre 0 y 1. Observa además que si un resultado de un fenómeno de azar ocurre muy seguido, entonces sus proporciones estarán cercanas a 1 y por lo tanto su probabilidad estará cercana

a 1, mientras que si un resultado ocurre pocas veces, entonces sus proporciones estarán cercanas a 0 y por lo tanto su probabilidad estará cercana a 0

4. La predicción probabilista

Recuerda que de un fenómeno determinista es posible *predecir* con certeza qué resultado va a tener. Con un fenómeno de azar, como no tenemos seguridad del resultado que va a ocurrir, no podemos predecirlo; podemos decir cuál creemos que será el resultado, pero con riesgo de equivocarnos. Sin embargo, aunque no se puede predecir cuál será el resultado al realizar un experimento de azar, sí podemos, gracias a la regularidad estadística, hacer cierto tipo de predicción, que llamamos *predicción probabilista*.

El paletero no puede predecir con certeza qué sabor le va a pedir una persona, pero sí puede predecir que de 100 compradores, aproximadamente 49 pedirán limón, ya que, como 100 es un número "grande", la proporción

$$\frac{\text{número de pedidos de limón en 100 pedidos}}{100}$$

es aproximadamente igual a 0.49, de acuerdo con la regularidad estadística. Si suponemos que en lugar de aproximadamente igual, esta proporción es exactamente igual a 0.49, entonces el número de pedidos de limón en 100 pedidos resulta ser exactamente igual a $100 \times 0.49 = 49$. Es claro que si afirmamos que será exactamente 49, es posible que nos equivoquemos, pero si podemos *predecir*, sin temor a equivocarnos, que el número de pedidos de limón en cada 100 pedidos será aproximadamente igual a 49, puede ser más, o menos, pero es casi seguro que la diferencia no será grande. Esta es una *predicción probabilista*.

Nuestro paletero ha llegado a saber, mediante sus registros estadísticos, que aproximadamente 49% de la gente pide paleta de limón, 25% pide grosella y 26% pide mandarina, y esto le sirve a él para decidir, haciendo una predicción probabilista, cuántas paletas de cada sabor llevar. Sabiendo que en la fiesta de Santa Erendira, en el pueblo, le van a comprar paletas aproximadamente 300 personas, él concluye que deberá llevar $0.49 \times 300 = 147$ paletas de limón, $0.25 \times 300 = 75$ paletas de grosella y $0.26 \times 300 = 78$ paletas de mandarina. Así es bastante probable que pueda satisfacer la demanda de paletas de los tres sabores y no se quede con paletas sin vender.

5. Los eventos y los conjuntos

Cuando realizamos un experimento de azar, hay veces que no nos interesa el resultado preciso que ocurre, sino solamente que el resultado sea de cierto tipo. Cuando lanzamos un dado y observamos el número de puntos en la cara que queda

arriba, los resultados posibles de este experimento de azar son los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, si nos interesa que el resultado sea un *número par*, entonces no importa que número es, sólo importa que sea uno de los números 2, 4 ó 6, si lo que deseamos es que el resultado sea un *número mayor que 4*, entonces tampoco importa que número es, sólo que sea uno de los números 5 ó 6.

Podemos expresar lo anterior usando la idea de *conjunto*. Los resultados posibles de un experimento de azar son los elementos de conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el resultado "cae un número par" está representado por el conjunto $\{2, 4, 6\}$; el resultado "cae un número mayor que 4" corresponde al conjunto $\{5, 6\}$.

La frase "cae un número par" es una abreviación de la oración "al lanzar el dado, el número de la cara que quedó arriba es par". Esta es una afirmación que, al realizar el experimento, puede ser cierta o falsa según el resultado que ocurra: si el resultado es par, la afirmación será cierta, y si es impar, será falsa. A este tipo de afirmaciones, que pueden ser ciertas o falsas según el resultado de un experimento de azar, las llamamos *eventos*. Un evento es algo que puede o no ocurrir; si al lanzar el dado cae el número 2, entonces el evento "cae un número par" ocurre, pero el evento "cae un número mayor que 4" no ocurre.

Al lanzar el dado, el evento "cae un número par" ocurre cuando el resultado está en el conjunto $\{2, 4, 6\}$, y no ocurre cuando el resultado no está en dicho conjunto. Este ejemplo ilustra lo siguiente: podemos establecer una relación entre *eventos y conjuntos de resultados*, de manera que a cada evento le corresponde el conjunto de resultados con los que el evento ocurre. Los *resultados individuales* también son eventos, sus conjuntos correspondientes tienen un solo elemento.

Esta representación de los eventos por medio de conjuntos nos permite también representar *operaciones con eventos mediante operaciones con conjuntos*, como veremos enseguida.

Consideremos los siguientes eventos y sus correspondientes conjuntos:

"cae un número par"	"cae un número mayor que 2"
$\{2, 4, 6\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$

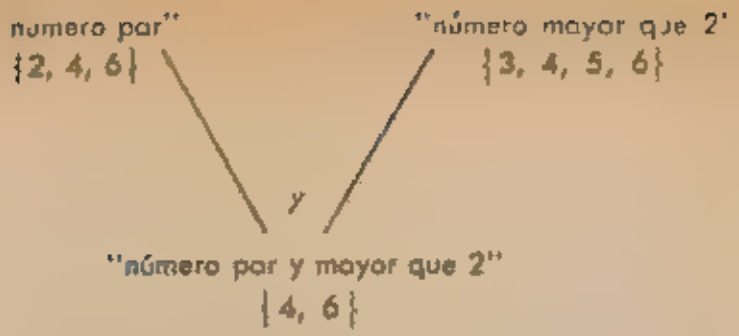
Podemos asociar los dos eventos mediante la conjunción "y":

"cae un número par" y "cae un número mayor que 2",

o dicho más brevemente,

"cae un número par y mayor que 2".

Este es también un evento y su conjunto correspondiente es $\{4, 6\}$, pues en el conjunto total $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sólo los elementos 4 y 6 tienen las dos propiedades, "par" y "mayor que 2". Observa que el conjunto $\{4, 6\}$ está formado por aquellos elementos de los conjuntos $\{2, 4, 6\}$ y $\{3, 4, 5, 6\}$ que pertenecen a la vez a los dos conjuntos.



Este conjunto está formado por los elementos que están en los dos conjuntos de arriba, o sea, los que tienen las dos propiedades: ' par ' y "mayor que 2". Decimos que el conjunto de abajo es la *interseccion* de los conjuntos de arriba

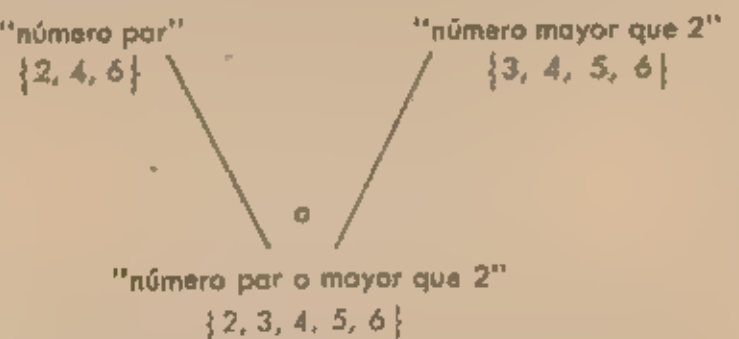
También podemos asociar los dos eventos mediante la conjunción "o"

"cae un número par" o "cae un numero mayor que 2',

o dicho más brevemente,

"cae un número par o mayor que 2".

Este es un evento y el conjunto que lo representa es $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, ya que en el conjunto total $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sólo los elementos 2, 3, 4, 5, 6 tienen la propiedad de ser par o mayor que 2, el elemento 2 tiene una sola de las propiedades ' par' , el elemento 5 tambien tiene una sola de las propiedades, ' mayor que 2" Al decir 'par o mayor que 2' , nos referimos a los elementos que tienen cualquiera de las dos propiedades: "par ', "mayor que 2", pero no nos importa cuál de las dos tengan, y tampoco nos importa que tengan las dos al mismo tiempo, únicamente nos importa que tengan por lo menos una de las dos



Este conjunto está formado por los elementos que están en *alguno* de los dos conjuntos de arriba; pueden estar en uno solo de ellos, sin importar cual, y también pueden estar al mismo tiempo en los dos. Decimos que el conjunto de abajo es la *unión* de los conjuntos de arriba

Por último, un evento podemos negarlo La negación del evento "cae numero mayor que 2 es el evento ' cae numero no mayor que 2 ', o lo que es lo mismo "cae numero menor que 3' , y éste es un evento representado por el conjunto $\{1, 2\}$

"número mayor que 2"
{3, 4, 5, 6}

| no

"número no mayor que 2"
{1, 2}

Este conjunto está formado por los elementos del conjunto total {1, 2, 3, 4, 5, 6} que no están en el conjunto de arriba. Decimos que el conjunto de abajo es el *complemento* del conjunto de arriba.

De lo que hemos visto aquí, observamos que los conjuntos son útiles en la probabilidad, porque podemos usarlos para representar eventos, y también porque al efectuar con los eventos las *operaciones lógicas y, o, no*, los conjuntos correspondientes a los nuevos eventos que se obtienen se pueden encontrar mediante las *operaciones de conjuntos, intersección, unión y complemento*. Sin embargo, no hay que olvidar que lo que nos interesa son los eventos, y que los conjuntos nos sirven solamente de ayuda para representar a los eventos.

6. La probabilidad de un evento

Mediante la *regularidad estadística* hemos llegado al concepto de probabilidad, y hasta ahora sólo hemos hablado de la probabilidad de un *resultado individual*, por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar un dado el resultado sea el número 4. Pero ahora sabemos que nos interesan los *eventos*, ya sea que sus correspondientes conjuntos tengan uno solo o varios elementos, puede interesarnos, por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar el dado el resultado sea un número par.

¿Podemos pensar en la probabilidad de un evento de la misma manera que en la probabilidad de un resultado individual? Claro que sí, porque si efectuamos el experimento muchas veces y anotamos cada vez que el evento ocurre, entonces podemos contar cuántas veces ocurre y, por lo tanto, calcular la proporción de veces que ha ocurrido el evento desde el principio. Si graficamos estas proporciones, como lo hizo el paciente, podemos observar nuevamente que se cumple la ley de regularidad estadística, o sea, que al aumentar el número de repeticiones del experimento, las proporciones tienden a concentrarse alrededor de una recta horizontal. La proporción correspondiente a esta recta, en el eje vertical, será la probabilidad del evento. No es raro que también con los eventos se cumpla la regularidad estadística, pues si estamos interesados en determinado evento, el experimento de azar es como si sólo tuviera dos resultados individuales: "el evento ocurre" y "el evento no ocurre", y ya sabemos que la regularidad estadística se cumple con resultados individuales.

7. Probabilidad empírica y probabilidad teórica

Hasta ahora se nos ha presentado la probabilidad como consecuencia de la ley de regularidad estadística. De acuerdo con esto, para encontrar la probabilidad de un evento tendríamos que repetir el experimento de azar un gran número de veces, para poder ver dónde se concentran las proporciones. A veces, esta es la única manera de encontrar una probabilidad; en el caso de las paletas solamente averiguando que sabores pide la gente podemos obtener la información que deseamos, no hay ninguna manera de "calcular" que sabor prefiere una persona. Por esta razón, se suele llamar a la probabilidad de la que hemos hablado *probabilidad empírica*, la palabra empírica significa que está basada en la experimentación, no se encuentra haciendo solamente razonamientos y cálculos matemáticos, sino que hay que realizar el experimento.

Por otra parte, hay experimentos de azar que, debido a ciertas propiedades que tienen, nos es posible encontrar probabilidades de eventos por medio de razonamientos matemáticos solamente, sin necesidad de efectuar el experimento, ni siquiera una vez. Por esta razón, o sea porque solamente se usan razonamientos matemáticos, una probabilidad que se encuentra de este modo se denomina *probabilidad teórica*.

El ejemplo más sencillo de una probabilidad teórica es el de un volado: "águila" tiene probabilidad 0.5 y "sol" tiene probabilidad 0.5, debido a que, como la moneda es perfectamente simétrica y homogénea, ambos resultados son igualmente probables, y como sólo son dos, entonces cada uno de ellos tiene la mitad de la probabilidad total, que es 1.

¿Qué relación hay entre la probabilidad empírica y la probabilidad teórica?

Sabemos que al lanzar una moneda la *probabilidad teórica* de "águila" es 0.5, obtuvimos este resultado mediante un razonamiento, sin necesidad de efectuar el experimento. Pero si nos ponemos a lanzar la moneda muchas veces y registramos las proporciones de veces que ocurre "águila", entonces, debido a la regularidad estadística, estas proporciones tenderán a concentrarse alrededor de una recta horizontal que corresponderá a la *probabilidad empírica* de "águila". ¿Pueden ser distintas la probabilidad teórica y la probabilidad empírica? Supongamos que lo son y que la probabilidad empírica de "águila" es 0.55 (en consecuencia, la probabilidad empírica de "sol" es 0.45, porque las dos suman 1). De acuerdo con la ley de regularidad estadística, esto significaría que "águila" sale más veces que "sol", porque sus proporciones son mayores. De aquí debemos concluir que la moneda tiene alguna característica que la hace caer más fácilmente águila que sol; pero esto está en contradicción con la suposición de que la moneda es simétrica y homogénea, de la cual dedujimos que los dos resultados tienen la misma probabilidad, o sea, que ocurren con igual facilidad.

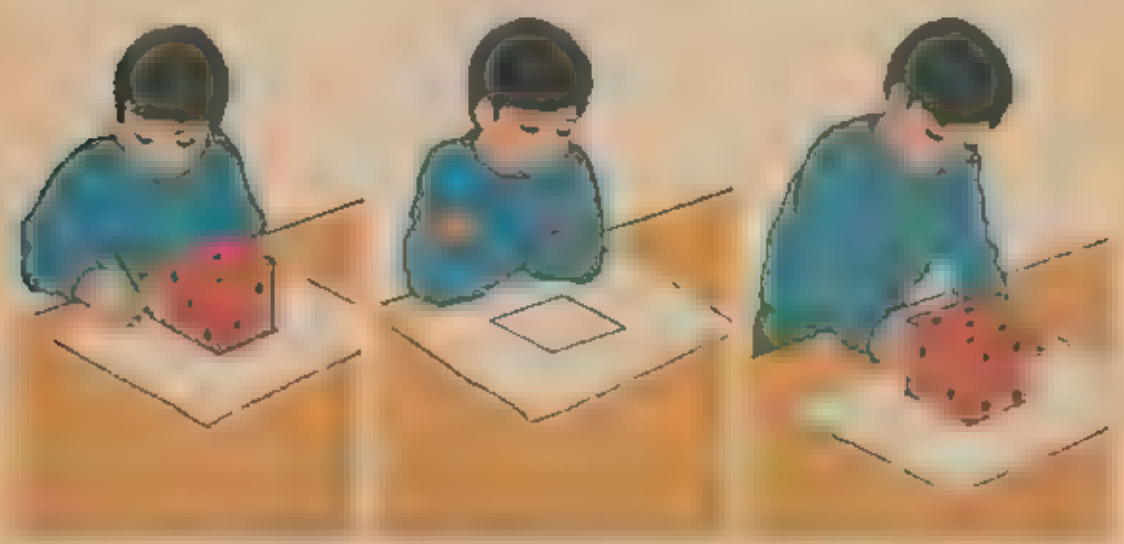
Del razonamiento anterior podemos sacar dos conclusiones: 1) Bajo la hipótesis de que la moneda es realmente simétrica y homogénea, la suposición de que la pro

babilidad teórica y la probabilidad empírica son distintas nos llevó a una contradicción, por lo tanto dicha suposición es incorrecta, así que la *probabilidad teórica y la probabilidad empírica deben ser iguales* (esto se llama ley de los grandes números) 2) Si al realizar muchas veces el experimento obtenemos una probabilidad empírica que difiere de la probabilidad teórica, entonces debemos concluir que las suposiciones acerca de la moneda, de las cuales obtuvimos la probabilidad teórica, son incorrectas o sea, que la moneda debe pesar más de un lado que del otro, o estar medio chueca.

8. Cálculo de probabilidades

Veamos un ejemplo de cálculo de probabilidades teóricas: el lanzamiento de un dado. Más adelante notaremos que muchos experimentos de azar son como este.

Un dado es un cuerpo regular. Esto significa lo siguiente: Imagínate que pones el dado sobre una superficie horizontal y dibujas en ella la cara de abajo del dado.



Si permaneces en cualquier posición que quieras, notarás que puedes hacer coincidir cada cara del dado con el trazo que hiciste en la superficie, y que siempre la figura que percibes es la misma (los puntos no importan).

Otra propiedad que tiene un buen dado es que es *homogéneo*. Esto quiere decir que el material del que está lleno el dado no está más concentrado en una parte que en otra. Imagínate que la superficie es de cartón y el dado está hueco por dentro, si lo llenaras una mitad de algodón y la otra de arena, entonces no sería homogéneo, porque el algodón pesa menos que la arena, pero si lo llenas todo de arena o si lo dejas vacío, entonces sí será homogéneo.

Estas dos propiedades del dado, ser regular y homogéneo, hacen que, al lanzarlo, cualquier resultado determinado pueda ocurrir con igual facilidad que cualquiera de los otros resultados. Es decir, cada uno de los posibles resultados, o sea

1, 2, 3, 4, 5, 6, tiene la misma probabilidad de ocurrir ¿Cuál será el valor de esta probabilidad? Para contestar esto, fíjate que el evento formado por todos los resultados posibles, o sea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tiene probabilidad igual a 1 (puedes convencerte de ello pensando en la regularidad estadística: el evento $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ siempre ocurre, por lo tanto la proporción de veces que ocurre siempre es 1). Ahora, el evento $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ está formado por 6 resultados que tienen todos la misma probabilidad, o sea que 6 veces la probabilidad de un resultado individual debe ser igual a 1, de aquí concluimos que dicha probabilidad debe ser $\frac{1}{6}$, porque $6 \times \frac{1}{6} = 1$.

Ya sabemos que cada uno de los 6 resultados individuales tiene probabilidad $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de un evento cualquiera, por ejemplo, "número par mayor que 3", o sea $\{4, 6\}$? Este evento está formado por 2 resultados individuales, cada uno de los cuales tiene probabilidad $\frac{1}{6}$, o sea que la probabilidad de "número par mayor que 3" es 2 veces $\frac{1}{6}$, es decir $\frac{2}{6}$.

Con este ejemplo te darás cuenta de que *la probabilidad de un evento es igual al número de resultados individuales que forman el evento, dividido entre el número total de resultados individuales*, o dicho de otra manera *la probabilidad de un evento es igual a la fracción de resultados individuales que lo forman*

Verifica que

1) la probabilidad de "número impar" es $\frac{3}{6}$

2) la probabilidad de "número impar menor que 5" es $\frac{2}{6}$

3) la probabilidad de "número mayor que 2" es $\frac{4}{6}$

4) la probabilidad de "número mayor que 2 y menor que 6" es $\frac{3}{6}$

5) la probabilidad de "número par o mayor que 3" es $\frac{4}{6}$

6) la probabilidad de "número par y múltiplo de 3" es $\frac{1}{6}$

7) la probabilidad de "número impar y múltiplo de 2" es 0

8) la probabilidad de "número impar o mayor que 1" es 1

Muchos otros experimentos de azar son como el lanzamiento de un dado, aunque no lo parezcan. Supongamos que una bolsa contiene 3 canicas rojas, 2 azules y 4 amarillas; el experimento consiste en sacar una canica al azar, para ver de qué color es. Sacar una canica *al azar* significa que la sacamos sin mirar y suponiendo que todas las canicas son del mismo tamaño y están muy bien revueltas, de modo que todas ellas tienen la misma probabilidad de ser sacadas. Este experimento de azar tiene 9 resultados individuales que son cada una de las canicas que pueden sacarse. Date cuenta de que, desde el punto de vista de las probabilidades, este experimento es como si se lanzara un "dado de 9 caras", con 3 caras rojas, 2 azules y 4 amarillas, y se trata de ver qué cara queda en determinada posición. La probabilidad de "cara roja" es $\frac{3}{9}$, la probabilidad de "cara azul" es $\frac{2}{9}$ y la de "cara amarilla" es $\frac{4}{9}$.

Verifica que

1) la probabilidad de "cara azul o amarilla" es $\frac{6}{9}$

2) la probabilidad de "cara no amarilla" es $\frac{5}{9}$

3) la probabilidad de "cara azul o no amarilla" es $\frac{5}{9}$

4) la probabilidad de "cara de cualquier color" es 1

5) la probabilidad de "cara roja y azul" es 0

Ahora observa que en el experimento de sacar una canica al azar, las probabilidades de "canica roja", "canica azul o amarilla", etc., son las mismas de arriba: basta sustituir "cara" por "canica".

De la misma manera, una moneda puede pensarse como un "dado de 2 caras", así vemos que al lanzar un volado la probabilidad de "águila" es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de "sol" es también $\frac{1}{2}$.

La conclusión de todo esto es la siguiente:

> *En un experimento de azar que tiene un cierto número de resultados individuales, todos igualmente probables, la probabilidad de un evento es igual al número de resultados individuales que contiene el evento, dividido entre el número total de resultados individuales.*

Si en tu salón se escoge a alguien al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea niño?, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de 1.60 m?, ¿cuál es la probabi-

lidad de que su apellido empiece con G?, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 12 años?

9. Eventos imposibles y eventos seguros

En los ejemplos de la sección anterior, te habrás dado cuenta de que algunos eventos tienen probabilidad igual a 0 y hay eventos con probabilidad igual a 1.

Al lanzar el dado, el evento "número impar y múltiplo de 2" tiene probabilidad igual a 0; esto se debe a que dicho evento es *imposible*, no puede ocurrir, pues no hay ningún número que a la vez sea impar y sea múltiplo de 2; el conjunto que representa a ese evento no tienen ningún elemento.

El evento "número impar o mayor que 1" tiene probabilidad igual a 1 porque cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 tiene alguna de las dos propiedades: "impar", "mayor que 1"; esto es, dicho evento está representado por el conjunto total $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y por lo tanto ocurre con seguridad, sin importar cuál sea el resultado; es un evento seguro.

Un evento *imposible* es un evento que no puede ocurrir; está representado por un conjunto que no tiene ningún elemento.

Un evento seguro es un evento que tiene la seguridad de ocurrir, cualquiera que sea el resultado del experimento; está representado por el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

Basta el ejemplo anterior para que te des cuenta de que *un evento imposible tiene probabilidad igual a 0, y un evento seguro tiene probabilidad igual a 1.*

10. Inferencia estadística

Recuerda al fabricante de calzado que les mide el pie a unas cuantas personas de una población, para decidir de qué tamaños hacer zapatos para toda la población. Lo que a él le gustaría conocer es cuántas personas tienen el pie de cada uno de los distintos tamaños, porque así podría determinar cuántos zapatos de cada tamaño le conviene producir.

Si el fabricante pudiera medir los pies de todas las personas de la población, entonces sabría exactamente la proporción de cada tamaño de pie. Pero naturalmente que no puede ir a medirle los pies a todos; entonces lo que hace es tomar una *muestra*, es decir, les mide el pie sólo a un cierto grupo de personas.

Supongamos que en la población hay 3 000 personas y que al fabricante le interesa saber cuántas de ellas calzan zapatos del número 23. Imaginemos que el fabricante toma una *muestra* de 50 personas y les mide el pie, con lo cual encuentra que 9 de ellas, o sea el 18%, usan zapatos del 23. El quiere *inferir* o *deducir* a partir de este dato qué por ciento de personas *en toda la población* usan zapatos de este número.

Este problema es como si se sacara al azar una muestra de 50 canicas de una bolsa con 3 000 canicas, de las cuales algunas están marcadas con el número 23, y quisiéramos saber, a partir del porciento de canicas del 23 en la muestra, cuál es el porciento de canicas del 23 en toda la colección de 3 000 canicas. Si suponemos que las canicas están muy bien revueltas, la proporción de canicas del 23 en la muestra debe ser aproximadamente igual a la proporción que hay en toda la colección. Entonces, si en la muestra encontramos 18% de canicas del 23, concluimos que en toda la colección hay *aproximadamente* 18% de canicas del 23, o sea, aproximadamente 540 canicas del 23.

Volviendo al problema de los zapatos, a partir de la muestra el fabricante *infiere* que aproximadamente 540 personas de toda la población calzan zapatos del 23. Es claro que en esta inferencia hay azar y puede equivocarse, porque sólo midiéndole el pie a todos se puede obtener la información exacta, pero su error no será muy grande.

Este procedimiento, en el que se trata de deducir o inferir el porciento de elementos que tienen determinada característica *en toda la población*, a partir del porciento que tienen dicha característica *en una muestra*, es un ejemplo de *inferencia estadística*. Naturalmente, cuanto mayor sea la muestra, la información obtenida a partir de ella será mejor y la probabilidad de equivocarse disminuirá.

11. Conclusión

En todos tus estudios de Matemáticas con estos libros de texto, a lo largo de la Primaria, se ha intentado principalmente ayudarte a desarrollar tus capacidades de razonamiento y análisis. Además, en determinadas ramas, como la Aritmética, se ha tratado también de que adquirieses cierto dominio de algunas cosas (división, quebrados, etc.), por lo importantes que son en nuestra vida diaria.

Tu aprendizaje de Probabilidad y Estadística se ha orientado primordialmente a familiarizarte con algunas de las ideas básicas que tratan estos temas. Esta preparación inicial podrá serte útil no solamente para proseguir tus estudios en los grados siguientes, sino también para que tus pensamientos acerca de la naturaleza, la sociedad y el mundo en general, puedan encaminarse guiados por un criterio amplio, científico, que tome en cuenta el azar, todas las posibilidades, y así, cuando seas adulto, analices las cosas inteligentemente, y no como muchas personas mayores que, a pesar de haber ido a la escuela, no aprendieron a proceder de manera sistemática y a razonar.

ESTE LIBRO ES PROPIEDAD DE LA REPÚBLICA MEXICANA

Para que lo use y lo conserve se entrega en forma absolutamente gratuita, pero con la condición de que lo cuide, a

.....

(nombre del educando)

alumno* alumna* del .....

(grado)

de la .....

(escuela)

..... **

de ....

(población) *(entidad federativa)*

Ninguna persona, física o moral, podrá convertir este libro en objeto de comercio, franco o clandestino; ni lucrar con él de ningún modo; ni pedir o cambio de él —por ningún concepto— cantidad o cosa alguna; ni llevarlo o mandarlo fuera del país, o intentar lo uno o lo otro.

La persona o personas, físicas o morales, que contravengan cualquiera de las prohibiciones o limitaciones mencionadas, quedarán sujetas a las sanciones penales que procedan.

Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos

* Tachar *alumno* o *alumna*, según el caso.
** Indicar, además del nombre que lleve el plantel, su número de registro (clave).

Esta primera edición (1 225 000 ejemplares) de **Matemáticas - Sexto Grado**, terminó de imprimirse el día 20 de agosto de 1974 en los talleres de Impresora y Editora Mexicana, S. A., situados en San Mateo Tecoloapan, Edo. de México.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

MÉXICO, D. F.